

А. Н. Роганин

Алгебра

В таблицах

Наглядный справочник школьников

**ВЕСЬ
КУРС**

быстро
и удобно

Корень n -й степени, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ ($y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$)

Свойства

1. Область определения: $(0; +\infty)$.
2. Функция не четная, ни нечетная.
3. На промежутке $(0; +\infty)$ функция возрастает.
4. Область значений: $(0; +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцируемая при $x \in (0; +\infty)$.

Функция $y = a^x$ ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$)

Свойства

1. Область определения: \mathbb{R} .
2. Функция нечетная, ни четная.
3. Для $x \in \mathbb{R}$ функция возрастает.
4. Область значений: $(0; +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцируемая.

Показательная функция

Функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

Свойства

1. Область определения: \mathbb{R} .
2. Функция не четная, ни нечетная.
3. Для $x \in \mathbb{R}$ функция возрастает.
4. Область значений: $(0; +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцируемая.

Арксинус, аркосинус, арктангенс и аркотангенс числа

Арксинус

Арксинусом числа a называют число ($\arcsin a$) из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, синус которого равен a .

Обозначение: $\arcsin a$.

$\arcsin a = \arctan \left[\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right]$ и $\sin a = a$.

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Аркусинус

Аркусинусом числа a называют число ($\arccos a$) из промежутка $(0; \pi)$, косинус которого равен a .

Обозначение: $\arccos a$.

$\arccos a = \arctan \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right]$ и $\cos a = a$.

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Арктангенс

Арктангенсом числа a называют число ($\arctan a$) из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a .

Обозначение: $\arctan a$.

$\arctan a = \arcsin \left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right]$ и $\tan a = a$.

$\arctan(-a) = -\arctan a$.

Аркотангенс

Аркотангенсом числа a называют число ($\text{arctg } a$) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Обозначение: $\text{arctg } a$.

$\text{arctg } a = \arcsin \left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right]$ и $\cot a = a$.

$\text{arctg}(-a) = \pi - \text{arctg } a$.

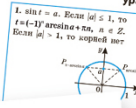
Значения арксинусов и аркосинусов некоторых чисел

	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Значения арктангенсов и аркотангенсов некоторых чисел

	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\arctan a$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$
$\text{arctg } a$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$

Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств



- 1) $\sin t = a$, $|a| \leq 1$, то $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\cos t = a$, $|a| \leq 1$, то $t = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3) $\sin t = a$, $|a| \leq 1$, $\arcsin a + 2\pi k \leq t \leq \arcsin a + 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $\cos t = a$, $|a| \leq 1$, $\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k + 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- 1) $\tan t = a$, $|a| < 1$, $\arctan a + 2\pi k \leq t \leq \arctan a + 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\cot t = a$, $|a| < 1$, $\text{arctg } a + 2\pi k \leq t \leq \text{arctg } a + 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- 1) $\tan t = a$, $|a| < 1$, $\arctan a + 2\pi k \leq t \leq \arctan a + 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\cot t = a$, $|a| < 1$, $\text{arctg } a + 2\pi k \leq t \leq \text{arctg } a + 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Повтори
перед
ОГЭ и ЕГЭ**

Содержание

Действительные числа	2
Координатная прямая и действительные числа. Модуль числа. Сравнение действительных чисел	3
Буквенные выражения. Числовые значения буквенных выражений.....	4
Степень с целым показателем и ее свойства.....	5
Арифметический квадратный корень и его свойства	6
Одночлены и действия над ними.....	7
Многочлены. Сложение и вычитание многочленов.....	8
Умножение и деление одночленов и многочленов. Формулы сокращенного умножения	9
Арифметический корень n -й степени и его свойства. Степень с рациональным показателем.....	10
Логарифмы и их свойства. Основное логарифмическое тождество.....	11
Алгебраическая дробь. Действия над дробями.....	12
Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного числа	13
Основные тригонометрические формулы.....	14
Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.....	15
Прогрессии.....	16
Функции.....	17
Линейная функция, ее свойства и график. Модуль x . Квадратичная функция, ее свойства и график.....	18
Степенная функция, ее свойства и график	19
Корень n -й степени, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики	20
Графики тригонометрических и обратно тригонометрических функций	21
Уравнение. Решение уравнения. Равносильные уравнения.....	22
Неравенства. Решение неравенств. Равносильные неравенства.....	23
Уравнения и системы уравнений с двумя переменными.....	24
Линейные уравнения и неравенства. Системы неравенств с одной переменной. Неполные квадратные уравнения	25
Квадратные уравнения и неравенства.....	26
Биквадратные уравнения. Иррациональные уравнения и неравенства	27
Показательные уравнения и неравенства	28
Логарифмические уравнения и неравенства	29
Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств	30
Производная функции, ее физический и геометрический смысл	31
Первообразная и интеграл.....	32

Действительные числа

Натуральные числа и ноль	Целые числа
<p>Числа 1, 2, 3, ..., используемые при счете, называются натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначают символом N. Натуральные числа записывают с помощью символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые называют цифрами. Такая запись чисел называется десятичной. Число 0 не является натуральным числом</p>	<p>Натуральные числа, противоположные им числа и число ноль называют целыми числами. Множество целых чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ обозначают символом Z. Например, $-10, -3, 0, 2, 7$ — целые числа, а числа $-2,5; 3,6$ не являются целыми</p>

Рациональные числа	Иррациональные числа
<p>Числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число ($m \in Z$), а n — натуральное число ($n \in N$), называют рациональными числами.</p> <p>Например, $3 = \frac{3}{1}; -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}; 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}; -3\frac{1}{2} = \frac{-7}{2}$ — рациональные.</p> <p>Множество рациональных чисел обозначают символом Q.</p> <p>Любое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.</p> <p>Например, $\frac{1}{4} = 0,25; \frac{1}{3} = 0,(3); \frac{5}{11} = 0,(45)$.</p> <p>Любая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа</p>	<p>Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число ($m \in Z$), а n — натуральное число ($n \in N$), называют иррациональными числами.</p> <p>Например, числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e$ — иррациональные числа. Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.</p> <p>Например, $\sqrt{2} = 1,4142135\dots;$ $\pi = 3,1415926\dots; e = 2,71828182\dots$</p> <p>Любая бесконечная непериодическая десятичная дробь является записью некоторого иррационального числа</p>

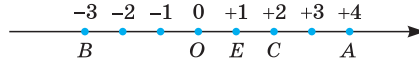
Действительные числа, их запись в виде десятичной дроби
<p>Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Множество действительных чисел обозначают символом R.</p> <p>Каждое натуральное число является одновременно и целым, и рациональным, и действительным. Каждое целое число является также рациональным и действительным.</p> <p>Например, все числа $\frac{15}{17}, -3, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$ — действительные.</p> <p>Любое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби.</p> <p>Например, $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,500\dots; \frac{1}{3} = 0,3333\dots; \sqrt{10} = 3,1622776\dots$</p> <p>Любая бесконечная десятичная дробь является записью некоторого действительного числа</p>

<p>Сумма, разность и произведение действительных чисел — также действительные числа. Если делитель отличен от нуля, то частное двух действительных чисел — тоже действительное число.</p> <p>Например, $-\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-14+15}{35} = \frac{1}{35}; -\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{5} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{11}{5} = \frac{-33}{40}; -0,3 : \frac{3}{7} = -\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{7}{10} = \frac{-7}{10}$</p>

Координатная прямая и действительные числа. Модуль числа. Сравнение действительных чисел

Координатная прямая и действительные числа

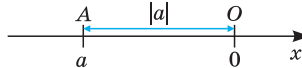
Координатной прямой называют прямую, на которой указано начало отсчета (точка O), положительное направление (отмечают стрелкой) и единичный отрезок.



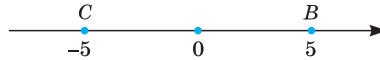
Каждому действительному числу a соответствует единственная точка A координатной прямой, и каждой точке A координатной прямой соответствует единственное действительное число a , которое называют координатой точки A (a). Само множество R всех действительных чисел называют **числовой прямой**, а ее элементы (то есть числа) — **точками числовой прямой**

Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).



На рисунке модули чисел 5 и -5 равны 5. Вместо слова «модуль» в записях используют символ $|$. Например, запись « $|-5|$ » означает «модуль числа -5 ».



Модуль числа 0 равен 0. Записывают так: $|0| = 0$.

Модуль числа не может быть отрицательным числом.

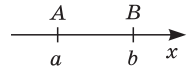
Модуль положительного числа и числа 0 равен самому числу. Например, $|14| = 14$, $|0| = 0$.

Модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному. Например, $|-4| = 4$, $|-3,5| = 3,5$.

Противоположные числа имеют равные модули: $|-a| = |a|$

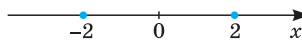
Формула расстояния между двумя точками с заданными координатами

Для любых точек $A(a)$ и $B(b)$ координатной прямой расстояние AB равно модулю разности координат этих точек, то есть $|AB| = |a - b|$



Сравнение действительных чисел

Из двух действительных чисел a и b , обозначенных на координатной прямой, большим является то, которое лежит правее, а меньшим — то, которое лежит левее. Например, $-2 < 2$, так как число 2 расположено справа от числа -2 .



Любое отрицательное число меньше любого положительного числа.

Из двух отрицательных чисел меньшим является то, модуль которого больше. Например, $-5 < -3$, так как $|-5| > |-3|$. Ноль больше любого отрицательного числа, но меньше любого положительного числа, то есть если a — отрицательное, то $a < 0$; если a — положительное, то $a > 0$. И наоборот, если $a > 0$, то число a — положительное, если $a < 0$, то число a — отрицательное

Буквенные выражения.

Числовые значения буквенных выражений

Буквенные выражения	Числовые значения буквенных выражений
<p>Буквенным выражением называют запись, в которой числа и буквы соединены знаками действий. Например, $x + 2$, $x + y$, $3x - 2y$, $\frac{a}{b}$ — буквенные выражения.</p> <p>Буквенные выражения называют также выражениями с переменными, а буквы — переменными</p>	<p>Если в буквенное выражение вместо букв подставить числа, то получим числовое выражение, значение которого называется числовым значением буквенного выражения при определенных значениях букв.</p> <p>Например, если $a = 3,5$, $b = 1,5$, то значением выражения $\frac{ab}{a+b}$ является значение выражения $\frac{3,5 \cdot 1,5}{3,5 + 1,5} = \frac{3,5 \cdot 1,5}{5} = 1,05$</p>

Рациональные и целые выражения	
<p>Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень и деления, его называют рациональным выражением.</p> <p>Например, $2xy + x$, $\frac{3xy}{x+y}$ — рациональные выражения</p>	<p>Рациональное выражение, которое не содержит деления на выражение с переменной, называют целым.</p> <p>Например, $x + y$, $2xy$, $\frac{x+y}{2}$ — целые выражения</p>

Свойства арифметических действий над действительными числами	
<p>Сложение действительных чисел имеет переместительное и сочетательное свойства. Другими словами, если a, b, c — любые действительные числа, то</p> $a + b = b + a,$ $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$ <p>Прибавление нуля не изменяет число:</p> $a + 0 = 0 + a = a.$ <p>Сумма противоположных чисел равна нулю:</p> $a + (-a) = 0$	<p>Умножение действительных чисел имеет переместительное и сочетательное свойства, то есть:</p> $a \cdot b = b \cdot a, \quad a(bc) = (ab)c = abc.$ <p>Умножение на единицу не изменяет действительное число: $a \cdot 1 = a$.</p> <p>Произведение числа на обратное ему число равно единице:</p> $a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0.$ <p>Произведение числа на нуль равно нулю:</p> $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
<p>Умножение действительных чисел обладает распределительным свойством относительно сложения (вычитания): $(a + b) \cdot c = ac + bc$; $(a - b) \cdot c = ac - bc$</p>	

Раскрытие скобок	
<p>Если перед скобками стоит знак «+», то можно опустить скобки и знак «+», сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «+».</p> <p>Например,</p> $a + (-b + c + 3) = a - b + c + 3;$ $a + (b - m + n) = a + b - m + n$	<p>Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «-», следует опустить скобки и знак «-», заменив знаки всех слагаемых в скобках на противоположные. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «-».</p> <p>Например,</p> $-(a - b) = -a + b;$ $x - (-y + z) = x + y - z$

Степень с целым показателем и ее свойства

В записи $a^n = b$ число a называют **основанием степени**, n — **показателем степени**, a^n — **степенью**, b — **значением степени**

Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n , больше единицы, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$.

Например, $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $0^n = 0$, $n \in N$; $1^n = 1$, $n \in N$

Первой степенью числа называют само число: $a^1 = a$. Например, $5^1 = 5$, $(-2)^1 = -2$

Степень с целым показателем

Нулевая степень числа, отличного от нуля, равна единице. Нулевая степень нуля не определена. $a^0 = 1$, $a \neq 0$, 0^0 — не определена. Например, $7^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$

Если $a \neq 0$ и $n \in N$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Выражение 0^{-n} — не определено, где $n \in N$.

Например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

Свойства степени

1. При умножении степеней с равными основаниями основание остается таким же, а показатели степеней складываются: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
Например, $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$.

2. При делении степеней с равными основаниями основание остается таким же, а из показателя степени делимого вычтут показатель степени делителя: $a^m : a^n = a^{m-n}$
или $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Например, $3^{-3} : 3^{-5} = 3^{-3+5} = 3^2 = 9$.

3. При возведении степени в степень основание остается таким же, а показатели перемножаются: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Например, $(2^{-3})^{-2} = 2^{-2 \cdot (-3)} = 2^6 = 64$.

4. При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель: $(ab)^n = a^n b^n$. Например, $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$.

5. При возведении в степень дроби в эту степень возводятся и числитель, и знаменатель: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Например, $\left(\frac{6}{2}\right)^5 = \frac{6^5}{2^5} = \frac{3^5}{1^5} = 3^5 = 243$.

6. При возведении дроби в степень с отрицательным показателем можно возвести обратную дробь в степень с противоположным показателем: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Например, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 5^3 = 125$

Возведение в степень считается арифметичным действием третьей степени. Если выражение содержит разные арифметические действия, то сначала выполняется возведение в степень как действие высшего (третьего) порядка, затем умножение и деление (действия второго порядка) и, наконец, сложение и вычитание (действия первого порядка). Например, $5 \cdot 2^3 - 6^2 : 12 = 5 \cdot 8 - 36 : 12 = 40 - 3 = 37$

Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и $n \in Z$. Число n называют **порядком числа**. Например, число $a = 125\,000$ записывают в стандартном виде так: $a = 1,25 \cdot 10^5$, а число $a = 0,000508$ — так: $a = 5,08 \cdot 10^{-4}$

Арифметический квадратный корень и его свойства

Квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a . Например, квадратный корень из числа 4 равен 2 или -2 , так как $2^2 = 4$, $(-2)^2 = 4$

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают так: \sqrt{a} . Знак $\sqrt{\quad}$ называют **знаком арифметического квадратного корня**; выражение, которое стоит под знаком корня, называют **подкорненным выражением**. Запись \sqrt{a} читают: «квадратный корень из a » (слово «арифметический» при чтении опускают).

Таким образом, $\sqrt{a} = b$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, означает $b^2 = a$. Если $a < 0$, то выражение \sqrt{a} не имеет смысла.

Например, $\sqrt{16} = 4$, так как $4^2 = 16$; $\sqrt{225} = 15$, так как $15^2 = 225$

Свойства арифметических квадратных корней

$(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$	$(\sqrt{27})^2 = 27$
Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$. Таким образом, $\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$	$\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(-6)^2} = 6$
Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$ то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{64 \cdot 0,04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,04} = 8 \cdot 0,2 = 1,6$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$
Корень из произведения, числитель которого неотрицательный, а знаменатель положительный, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$. Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$
Внесение множителя под знак квадратного корня: а) $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a}$, при $b \geq 0$; б) $b\sqrt{a} = -\sqrt{b^2 a}$, при $b < 0$	$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$; $-3\sqrt{2} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{18}$
Вынесение множителя из-под знака корня: а) $\sqrt{b^2 a} = b\sqrt{a}$, при $a \geq 0$, $b \geq 0$; б) $\sqrt{b^2 a} = -b\sqrt{a}$, при $b < 0$	$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{(-3)^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Одночлены и действия над ними

Одночлен	
<p>Одночленом называют произведение чисел, переменных и их натуральных степеней, а также сами числа, переменные и их натуральные степени</p>	$5a, 6a^2b, 3, x, xyz$ — одночлены
<p>Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с разными буквенными основаниями</p>	$3ab, 12x^2y^2z, -a, -x^2y$ — одночлены стандартного вида
<p>Коэффициентом одночлена называют числовой множитель одночлена стандартного вида. Коэффициенты 1 и -1 в одночленах не записывают</p>	<p>Коэффициентами одночленов $5x^2, -3ab, -a^2b, xyz$ являются соответственно числа 5, $-3, -1, 1$</p>
<p>Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и полученное число поставить на первое место, а потом произведения одинаковых буквенных множителей записать в виде степеней</p>	$2ab \cdot (-3a^2b) \cdot (-3a^3b) =$ $= (2 \cdot (-3) \cdot (-3)) \cdot (a \cdot a^2 \cdot a^3) \times$ $\times (b \cdot b \cdot b) = 18a^6b^3$
<p>Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех буквенных множителей, входящих в состав одночлена. Если одночленом является число, отличное от нуля, то считают, что его степень равна нулю</p>	<p>Степень одночлена $5x^3yz^6$ равна 10, поскольку</p> $3 + 1 + 6 = 10$

Действия над одночленами

<p>Чтобы умножить одночлен на одночлен, нужно перемножить их коэффициенты и перемножить степени с одинаковыми основаниями</p>	$12a^2y \cdot (-2ab^3y^3) =$ $(12 \cdot (-2)) \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b^3) \cdot (y \cdot y^3) =$ $= -24a^3b^3y^4$
<p>Чтобы возвести одночлен в степень, нужно возвести его коэффициент в эту степень и умножить показатель степени каждой буквы на показатель степени, в которую возводится одночлен</p>	$(-3a^2bx^5)^2 =$ $= (-3)^2 \cdot a^{2 \cdot 2} \cdot b^{1 \cdot 2} \cdot x^{5 \cdot 2} =$ $= 9a^4b^2x^{10}$
<p>Чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя, к найденному частному приписать множителями каждую переменную делимого с показателем, равным разности показателей этой переменной в делимом и делителе</p>	$12x^7y^3z^{12} : (4x^3yz^7) =$ $= 3x^{7-3}y^{3-1}z^{12-7} =$ $= 3x^4y^2z^5$

Многочлены. Сложение и вычитание многочленов

Многочлен	
Многочленом называют алгебраическую сумму нескольких одночленов	$3xy + ab + 2$; $7x^2b - 2xy + a$ — многочлены
Одночлены, из которых состоит многочлен, называют его членами . Одночлен — отдельный вид многочлена. Многочлен, содержащий два или три слагаемых, называют соответственно двучленом , трехчленом	$a^2 - b^2$, $x + y$ — двучлены; $a + ab + b$, $x^2 - 2x - 4$ — трехчлены
Подобные члены многочлена — это одинаковые одночлены или одночлены стандартного вида, которые отличаются только коэффициентами	В многочлене $15a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 5ab^2$ первый и третий, второй и четвертый члены подобны
Приведение подобных членов — это упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных членов заменяется одним членом	$15a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 5ab^2 = 8a^2b + 8ab^2$
Стандартный вид многочлена — это запись многочлена, все члены которого записаны в стандартном виде и среди них нет подобных	$a^2 - ab + b^2$, $ab + bc + ac$ — многочлены стандартного вида; $3a^2 + 2b^2 - 3ab + a^2$ — многочлен нестандартного вида
Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых состоит многочлен. Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида	Степень многочлена $5a^7b + 5ab^5 - 2a^5b^5$ равна степени одночлена $-2a^5b^5$, то есть $5 + 5 = 10$

Сложение и вычитание многочленов

При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохранив знаки каждого одночлена	$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 5) + (6x^2 + 5x - 3) &= \\ &= 3x^2 - 2x + 5 + 6x^2 + 5x - 3 = \\ &= 9x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$
При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «-», то скобки можно опустить, изменив знак каждого одночлена, содержащегося в скобках, на противоположный	$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 5) - (6x^2 + 5x - 3) &= \\ &= 3x^2 - 2x + 5 - 6x^2 - 5x + 3 = \\ &= -3x^2 - 7x + 8 \end{aligned}$
Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.	$\begin{aligned} (2x^2 - 3x + 2) - (3x^2 - 2x - 1) - (-x^2 + 2x + 1) + (-2x^2 + x - 1) &= \\ &= \underline{2x^2} - \underline{3x} + \underline{2} - \underline{3x^2} + \underline{2x} + \underline{1} + \underline{x^2} - \underline{2x} - \underline{1} - \underline{2x^2} + \underline{x} - \underline{1} = \\ &= -2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$

Умножение и деление одночленов и многочленов.

Формулы сокращенного умножения

Умножение и деление одночленов и многочленов	
Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и сложить полученные одночлены	$3a(a^2 - 2a + ab) = 3a^3 - 6a^2 + 3a^2b$
Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и сложить полученные одночлены	$(3x - 2)(2x - 3) = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 = 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 6x^2 - 13x + 6$
Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и сложить полученные результаты	$(5x^7 - 2x^5 + 3x^2 + 6x) : (2x) = 5x^7 : (2x) - 2x^5 : (2x) + 3x^2 : (2x) + 6x : (2x) = 2,5x^6 - x^4 + 1,5x + 3$

Формулы сокращенного умножения	
Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$
Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(3a - 2)^2 = 9a^2 - 12ab + 4$
Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$(5a - 3b)(5a + 3b) = 25a^2 - 9b^2$
Произведение суммы двух выражений на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих выражений. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	$(3 + x)(9 - 3x + x^2) = 27 + x^3$
Произведение разности двух выражений на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих выражений. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	$(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = 8x^3 - 27y^3$
Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения плюс куб второго выражения. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(2 + 5x)^3 = 8 + 60x + 150x^2 + 125x^3$
Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения минус куб второго выражения. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

Арифметический корень n -й степени и его свойства. Степень с рациональным показателем

Корень n -й степени из числа	
<p>Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которой равна a</p>	<p>Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$. Корень четвертой степени из числа 1 равен 1 или -1, поскольку $1^4 = 1$, $(-1)^4 = 1$</p>

Арифметический корень n -го степени из числа	
<p>Арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a, то есть $\sqrt[n]{a} = x$ означает $x^n = a$ или $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Например, $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[4]{1} = 1$; $\sqrt[5]{32} = 2$</p>	
<p>Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел: $\sqrt[2k]{a} = x, a \geq 0$</p>	<p>Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$</p>

Основные свойства корней	
<p>1. Для любого действительного x</p> $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x , & \text{если } n - \text{четное} \\ x, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = -2 = 2; \quad \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
<p>2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$</p>	$\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 125;$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$
<p>3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$</p>	$\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5; \quad \sqrt[4]{\frac{5}{80}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$
<p>4. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}, a \geq 0$</p>	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[20]{3}$
<p>5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, a \geq 0$</p>	$\sqrt[4]{3^8} = \sqrt{3^8} = \sqrt{27}$
<p>6. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k, a \geq 0$</p>	$(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

Степень с рациональным показателем	
<p>Степенью $a^{\frac{m}{n}}$ числа $a > 0$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (n > 1)$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$. Следовательно, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$</p>	<p>Например, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$. Степень числа 0 определена только для положительных показателей по определению: $0^r = 0$ для любого $r > 0$</p>
<p>Для любых рациональных чисел p и q и любых положительных a и b справедливы равенства:</p>	
$a^p \cdot a^q = a^{p+q};$	$a^p : a^q = a^{p-q};$
$(a^p)^q = a^{pq};$	$(ab)^p = a^p \cdot b^p;$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p};$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$

Логарифмы и их свойства.

Основное логарифмическое тождество

Логарифм

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

Например, $\log_2 8 = 3$, поскольку $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, поскольку $2^{-2} = \frac{1}{4}$

Десятичными логарифмами называют логарифмы по основанию 10, их обозначают \lg .

Например, $\lg 100 = 2$, $\lg 0,0001 = -4$

Натуральными логарифмами называют логарифмы по основанию e (число e — иррациональное, $e \approx 2,718281828459045\dots$), их обозначают \ln . Например, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$

Основное логарифмическое тождество

Равенство $a^{\log_a b} = b$, справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется **основным логарифмическим тождеством**. Например, $2^{\log_2 5} = 5$, $2^{-\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Основные свойства логарифмов

Для любых $a > 0$, $a \neq 1$ и любых положительных x и y выполняются равенства:

1. $\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$\log_{11} 11 = 1$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6(18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
5. $\log_a x^p = p \log_a x$, ($p \in R$)	$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$, ($p \in R$)	$\log_{125} 5 = \log_{5^3} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ($b > 0$, $b \neq 1$)	$\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2$

Действие нахождения логарифма числа (выражения) называют **логарифмированием**.

$$\lg \frac{a^2 b^2}{c^3} = \lg(a^2 b^2) - \lg c^3 = \lg a^2 + \lg b^2 - \lg c^3 = 2 \lg a + 2 \lg b - 3 \lg c$$

Потенцирование — нахождение числа (выражения) по его логарифму.

$$\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c; \quad \lg x = \lg(5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4; \quad \lg x = \lg \sqrt{5a} - \lg b^3 + \lg c^4;$$

$$\lg x = \lg(\sqrt{5a} \cdot c^4) - \lg b^3; \quad \lg x = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}; \quad x = \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$$

Алгебраическая дробь. Действия над дробями

Алгебраическая дробь

Алгебраической называют дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения. Например, $\frac{a^2+b}{c}$; $\frac{3x}{4y}$; $\frac{3x-2y}{a+1}$ — алгебраические дроби.

Предусматривается, что буквы, используемые в записи алгебраической дроби, могут приобретать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю. Например, дробь $\frac{a+3}{a(a-9)}$ имеет смысл при всех значениях переменной a , кроме 0 и 9

Основное свойство дроби. Сокращение алгебраических дробей

При умножении (делении) числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получаем дробь, равную данной дроби.

Например, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; $-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$; $-\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}$

Действия над дробями

Сложение и вычитание

Если $b \neq 0$, то $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Например,

$$\frac{2x-3y}{5xy} + \frac{2x-7y}{5xy} = \frac{2x-3y+2x-7y}{5xy} = \frac{4x-10y}{5xy}; \quad \frac{x^2}{3x-6} - \frac{4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}.$$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно:

- ▣ разложить на множители числитель и знаменатель каждой дроби;
- ▣ сократить множители в числителе и знаменателе каждой дроби;
- ▣ найти и записать общий знаменатель дробей;
- ▣ найти и записать дополнительные множители для каждой дроби;
- ▣ записать сумму (разность) произведений числителей и дополнительных множителей, учитывая знаки;
- ▣ упростить (если возможно) полученную дробь.

Например,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{ab-b^2} + \frac{b^2}{ab-a^2} - \frac{b}{a} &= \frac{a^2}{b(a-b)} + \frac{b^2}{a(b-a)} - \frac{b}{a} = \frac{a/a^2}{b(a-b)} - \frac{b/b^2}{a(a-b)} - \frac{(a-b)b/b}{a} = \\ &= \frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)} = \frac{a^3-ab^2}{ab(a-b)} = \frac{a(a-b)(a+b)}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

Умножение алгебраических дробей

Если $b \neq 0$, $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Например, $\frac{x^2-4}{3x(x-2)} \cdot \frac{x^2}{2+x} = \frac{(x-2)(x+2) \cdot x^2}{3x(x-2)(2+x)} = \frac{x}{3}$

Деление алгебраических дробей

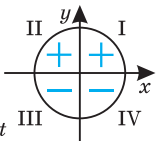
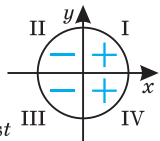
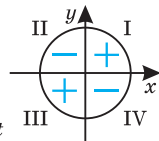
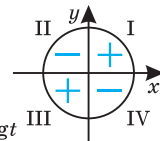
Если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Например, $\frac{x^2-y^2}{2xy} : \frac{x+y}{4x} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \cdot \frac{4x}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y) \cdot 4x}{2xy(x+y)} = \frac{2(x-y)}{y}$

Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного числа

Синус числа	Косинус числа
<p>Синус числа t — ордината точки P_t единичной окружности. Обозначают $\sin t$. Наименьший положительный период 2π: $\sin(2\pi + t) = \sin t$</p>	<p>Косинус числа t — абсцисса точки P_t единичной окружности. Обозначают $\cos t$. Наименьший положительный период 2π: $\cos(2\pi + t) = \cos t$</p>

Тангенс числа	Котангенс числа
<p>Тангенс числа t — отношение $\sin t$ к $\cos t$. Обозначают $\operatorname{tg} t$. $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ Ось тангенсов — прямая $x = 1$. Тангенс числа t — ордината соответствующей точки оси тангенсов. Наименьший положительный период π: $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$</p>	<p>Котангенс числа t — отношение $\cos t$ к $\sin t$. Обозначают $\operatorname{ctg} t$. $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$ Ось котангенсов — прямая $y = 1$. Котангенс числа t — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов. Наименьший положительный период π: $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$</p>

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса			
 <p style="text-align: center;">$\sin t$</p>	 <p style="text-align: center;">$\cos t$</p>	 <p style="text-align: center;">$\operatorname{tg} t$</p>	 <p style="text-align: center;">$\operatorname{ctg} t$</p>

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов								
t , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t , град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Четность (нечетность)			
$\sin(-t) = -\sin t$	$\cos(-t) = \cos t$	$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$

Основные тригонометрические формулы

Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
3. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Формулы сложения

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{-1 \pm \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}$

Формулы преобразования суммы в произведение

1. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
2. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
3. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
4. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$
5. $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
6. $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Формулы понижения степени

1. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
3. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
2. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
4. $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

Формула вспомогательного угла

1. $a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \varphi)$, где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$
2. $\cos \alpha \pm \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$

Формулы двойного угла

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, отсюда $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$

Формулы половинного угла

1. $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
2. $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
3. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Формулы преобразования произведения в сумму

1. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
2. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
3. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

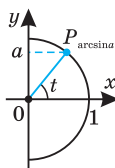
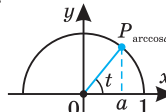
Формулы приведения

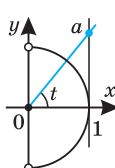
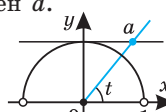
	Угол t	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
Функции	$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
	$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
	$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Универсальная тригонометрическая подстановка

1. $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
2. $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа

Арксинус	Арккосинус
<p>Арксинусом числа a называют число (угол) t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Обозначение: $\arcsin a$. $\arcsin a = t \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t = a$. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$</p> 	<p>Арккосинусом числа a называют число (угол) t из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. Обозначение: $\arccos a$. $\arccos a = t \Leftrightarrow t \in [0; \pi]$ и $\cos t = a$. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$</p> 

Арктангенс	Арккотангенс
<p>Арктангенсом числа a называют число (угол) t из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Обозначение: $\operatorname{arctg} a$. $\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} t = a$. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$</p> 	<p>Арккотангенсом числа a называют число (угол) t из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. Обозначение: $\operatorname{arcctg} a$. $\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow t \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} t = a$. $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$</p> 

Значения арксинусов и арккосинусов некоторых чисел

	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Значения арктангенсов и арккотангенсов некоторых чисел

	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Основные соотношения между арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом числа

$\sin(\arcsin a) = a, a \in [-1; 1]$	$\arcsin(\sin t) = t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos(\arccos a) = a, a \in [-1; 1]$	$\arccos(\cos t) = t, t \in [0; \pi]$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, a \in R$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, a \in R$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t, t \in (0; \pi)$
$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, a \in [-1; 1]$	$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in R$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	
Арифметическая прогрессия — последовательность $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавлено одно и то же число d , называемое разностью арифметической прогрессии	Геометрическая прогрессия — последовательность $b_1; b_2; b_3; b_4; \dots; b_n; \dots$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q ($q \neq 0, q \neq 1, b_1 \neq 0$), называемое знаменателем геометрической прогрессии
Рекуррентная формула	
$a_{n+1} = a_n + d, n \in N$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0, q \neq 0, q \neq 1, n \in N$
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + d(n - 1), n \in N$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	
$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, n \in N$	$ b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ (или $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$)
Формула суммы n первых членов	
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n; S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1; S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, q \neq 1$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $|q| < 1$

Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + \dots$$

является числом, которое определяется по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Например, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Некоторые числовые последовательности и их суммы

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) + 2n = n(n+1);$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Функции

Числовая функция с областью определения D — зависимость, при которой каждому числу x из множества D соответствует определенное единственное число y из множества E : $y = f(x)$.

Областью определения $D(f)$ называют множество значений, которые может принимать x .

Областью значений $E(f)$ называют множество значений, которые может приобретать $f(x)$ для $x \in D(f)$

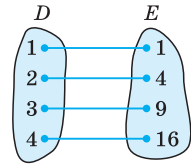
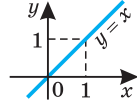
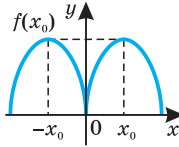


График функции $y = f(x)$ — множество точек плоскости с координатами (x, y) , где x пробегает всю область определения функции $f(x)$, а y — соответствующее значение функции

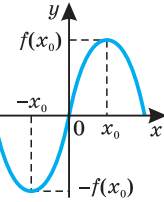


Четные и нечетные функции

Функция $y = f(x)$ **четная**, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четных функций симметричен относительно оси ординат

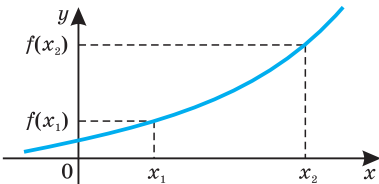


Функция $y = f(x)$ **нечетная**, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетных функций симметричен относительно начала координат

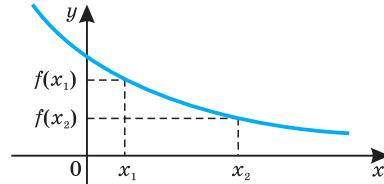


Возрастающие и убывающие функции

Функция $y = f(x)$ **возрастающая** на данном числовом промежутке X , если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$



Функция $y = f(x)$ **убывающая** на данном числовом промежутке X , если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$

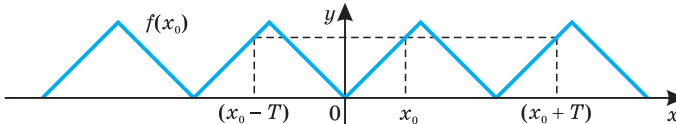


Периодические функции

Периодическая функция: $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$, $x \in D(f)$, $T > 0$.

Число T — **период функции**, а наименьшее положительное значение T — **основной период функции**.

График функции состоит из бесконечно повторяемых фрагментов графика функции на промежутке $[0; T]$. Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T , то функция $y = f(kx + b)$ имеет наименьший положительный период $\frac{T}{|k|}$



Линейная функция, ее свойства и график.

Модуль x. Квадратичная функция, ее свойства и график

Линейная функция, ее свойства и график. Модуль x					
<p style="text-align: center;">Функция $y = kx$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$k > 0$ $k = \operatorname{tg} \alpha$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$k < 0$ $k = \operatorname{tg} \alpha$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> Область определения: R. Функция нечетная. Для $x \in R$ функция: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">убывает</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">возрастает</td> </tr> </table> Область значений: R. Функция непрерывная и дифференцируемая. График — прямая, проходящая через начало координат 	убывает	возрастает	<p style="text-align: center;">Функция $y = kx + b$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$k > 0$ $-\frac{b}{k}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$k < 0$ $\frac{b}{k}$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> Область определения: R. Функция ни четная, ни нечетная. Для $x \in R$ функция: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">возрастает</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">убывает</td> </tr> </table> Область значений: R. Функция непрерывная и дифференцируемая. График — прямая 	возрастает	убывает
убывает	возрастает				
возрастает	убывает				

<p style="text-align: center;">Функция $y = b$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> Область определения: R. Функция четная. Если $b = 0$, то функция и четная, и нечетная. Для $x \in R$ функция постоянная. Область значений: $\{b\}$. Функция непрерывная и дифференцируемая. График — прямая, параллельная Ox, если $b \neq 0$, и прямая, совпадающая с Ox, если $b = 0$. Функция периодическая, любое число является периодом, наименьшего положительного периода нет <div style="text-align: center;"> </div>	<p style="text-align: center;">Функция $y = x$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> Область определения: R. Функция четная. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает; на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. Область значений: $[0; +\infty)$. Функция непрерывная и дифференцируемая для $x \neq 0$ <div style="text-align: center;"> </div>
--	--

Квадратичная функция, ее свойства и график									
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$a > 0$ $D > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a < 0$ $D > 0$</p> </div> </div> $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$a > 0$ $D = 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a > 0$ $D < 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a < 0$ $D = 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a < 0$ $D < 0$</p> </div> </div> $x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> Область определения: R. Если $b = 0$, то функция четная. Если $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная. На промежутке $(-\infty; x_0]$ функция: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">убывает</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">возрастает</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">На промежутке $[x_0; +\infty)$ функция:</td> <td style="width: 50%;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">возрастает</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">убывает</td> </tr> </table> Область значений: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">$[y_0; +\infty)$</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">$(-\infty; y_0]$</td> </tr> </table> Функция непрерывная и дифференцируемая. График функции — парабола 	убывает	возрастает	На промежутке $[x_0; +\infty)$ функция:		возрастает	убывает	$[y_0; +\infty)$	$(-\infty; y_0]$	
убывает	возрастает								
На промежутке $[x_0; +\infty)$ функция:									
возрастает	убывает								
$[y_0; +\infty)$	$(-\infty; y_0]$								

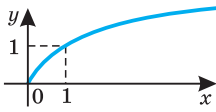
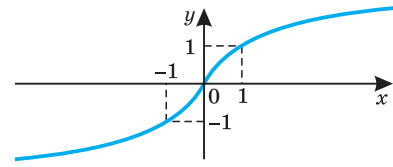
Степенная функция, ее свойства и график

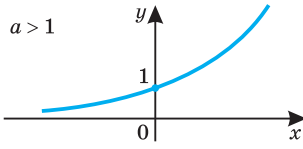
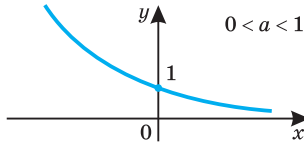
<p>Функция $y = ax^2$ ($y = ax^{2n}$, $a \neq 0$, $n \in N$)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$a > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a < 0$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Функция четная. 3. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">убывает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">возрастает</td> </tr> <tr> <td colspan="2">На промежутке $[0; +\infty)$ функция:</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">возрастает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">убывает</td> </tr> </table> 4. Область значений: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">$[0; +\infty)$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(-\infty; 0]$</td> </tr> </table> 5. Функция непрерывная и дифференцируемая. 6. График функции $y = ax^2$ — парабола 	убывает	возрастает	На промежутке $[0; +\infty)$ функция:		возрастает	убывает	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	<p>Функция $y = ax^3$ ($y = ax^{2n+1}$, $a \neq 0$, $n \in N$)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$a > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$a < 0$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Функция четная. 3. Для $x \in R$ функция: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">возрастает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">убывает</td> </tr> </table> 4. Область значений: R. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая. 6. График функции $y = ax^3$ — кубическая парабола 	возрастает	убывает
убывает	возрастает										
На промежутке $[0; +\infty)$ функция:											
возрастает	убывает										
$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$										
возрастает	убывает										

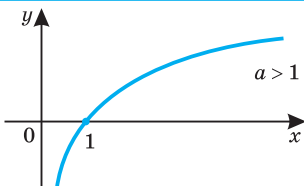
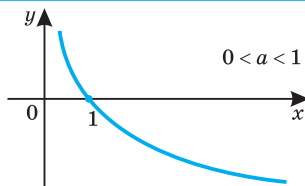
<p>Функция $y = \frac{k}{x^2}$ ($y = \frac{k}{x^{2n}}$, $k \neq 0$, $n \in N$)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$k > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$k < 0$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $x \neq 0$. 2. Функция четная. 3. Для $x \in (-\infty; 0)$ функция: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">возрастает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">убывает</td> </tr> <tr> <td colspan="2">Для $x \in (0; +\infty)$ функция:</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">убывает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">возрастает</td> </tr> </table> 4. Область значений: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">$(0; +\infty)$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(-\infty; 0)$</td> </tr> </table> 5. Функция непрерывная и дифференцируемая в области определения 	возрастает	убывает	Для $x \in (0; +\infty)$ функция:		убывает	возрастает	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	<p>Функция $y = \frac{k}{x}$ ($y = \frac{k}{x^{2n+1}}$, $k \neq 0$, $n \in N$)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$k > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$k < 0$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $x \neq 0$. 2. Функция нечетная. 3. На промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$ функция: <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">убывает</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">возрастает</td> </tr> </table> 4. Область значений: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая для $x \neq 0$. 6. График функции $y = \frac{k}{x}$ — гипербола 	убывает	возрастает
возрастает	убывает										
Для $x \in (0; +\infty)$ функция:											
убывает	возрастает										
$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$										
убывает	возрастает										

<p>Функция $y = x^r$ (r — положительная несократимая дробь)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$r > 1$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$0 < r < 1$</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $[0; +\infty)$. 2. Функция ни четная, ни нечетная. 3. Для $x \in [0; +\infty)$ функция возрастает. 4. Область значений: $(0; +\infty)$. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая при $x \in (0; +\infty)$ 	<p>Функция $y = x^{-r}$ (r — положительная несократимая дробь)</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $(0; +\infty)$. 2. Функция ни четная, ни нечетная. 3. Для $x \in (0; +\infty)$ функция убывает. 4. Область значений: $(0; +\infty)$. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая
--	---

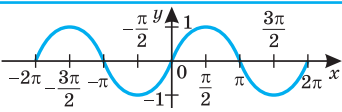
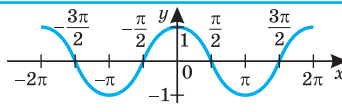
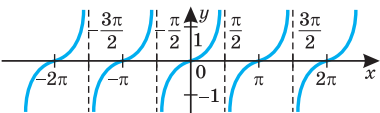
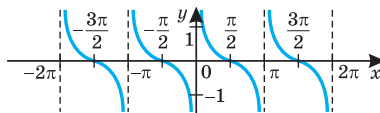
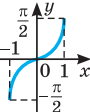
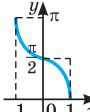
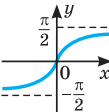
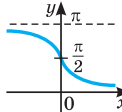
Корень n -й степени, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики

Корень n -й степени	
<p style="text-align: center;">Функция $y = \sqrt[n]{x}$ ($y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$)</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $[0; +\infty)$. 2. Функция ни четная, ни нечетная. 3. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. 4. Область значений: $[0; +\infty)$. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая при $x \in (0; +\infty)$ 	<p style="text-align: center;">Функция $y = \sqrt[3]{x}$ ($y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$)</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: \mathbb{R}. 2. Функция нечетная. 3. Для $x \in \mathbb{R}$ функция возрастает. 4. Область значений: \mathbb{R}. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая

Показательная функция	
Функция $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$)	
<p style="text-align: center;">$a > 1$</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p style="text-align: center;">$0 < a < 1$</p> <div style="text-align: center;">  </div>
Свойства	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: \mathbb{R}. 2. Функция ни четная, ни нечетная. 3. Для $x \in \mathbb{R}$ функция: <div style="text-align: center;">возрастает</div> 4. Область значений: $(0; +\infty)$. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая 	<div style="text-align: center;">убывает</div>

Логарифмическая функция	
Функция $y = \log_a x$ ($a \neq 1$, $a > 0$)	
<p style="text-align: center;">$a > 1$</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p style="text-align: center;">$0 < a < 1$</p> <div style="text-align: center;">  </div>
Свойства	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $(0; +\infty)$. 2. Функция ни четная, ни нечетная. 3. Для $x \in (0; +\infty)$ функция: <div style="text-align: center;">возрастает</div> 4. Область значений: \mathbb{R}. 5. Функция непрерывная и дифференцируемая 	<div style="text-align: center;">убывает</div>

Графики тригонометрических и обратно тригонометрических функций

<p style="text-align: center;">Функция $y = \sin x$</p>  <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Область значений: $[-1; 1]$. 3. Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$. 4. Функция периодическая с периодом 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$. 5. Нули функции $x = \pi n, n \in Z$. 6. Функция возрастает на промежутках $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z$; убывает на промежутках $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z$. 7. Наименьшее значение $y = -1$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Наибольшее значение $y = 1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. 	<p style="text-align: center;">Функция $y = \cos x$</p>  <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Область значений: $[-1; 1]$. 3. Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$. 4. Функция периодическая с периодом 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$. 5. Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. 6. Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in Z$; убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$. 7. Наименьшее значение $y = -1$, если $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. Наибольшее значение $y = 1$, если $x = 2\pi n, n \in Z$.
<p style="text-align: center;">Функция $y = \operatorname{tg} x$</p>  <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. 2. Область значений: R. 3. Функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. 4. Функция периодическая с периодом π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$. 5. Нули функции $x = \pi n, n \in Z$. 6. Функция возрастает на промежутках $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$. 	<p style="text-align: center;">Функция $y = \operatorname{ctg} x$</p>  <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $x \neq \pi n, n \in Z$. 2. Область значений: R. 3. Функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. 4. Функция периодическая с периодом π: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x$. 5. Нули функции $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. 6. Функция убывает на промежутках $[\pi n; \pi + \pi n], n \in Z$.
<p style="text-align: center;">Функция $y = \arcsin x$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $[-1; 1]$. 2. Область значений: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. 3. Функция возрастающая. 4. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ 	<p style="text-align: center;">Функция $y = \arccos x$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: $[-1; 1]$. 2. Область значений: $[0; \pi]$. 3. Функция убывающая. 4. Функция ни четная, ни нечетная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ 
<p style="text-align: center;">Функция $y = \operatorname{arctg} x$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Область значений: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. 3. Функция возрастающая. 4. Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ 	<p style="text-align: center;">Функция $y = \operatorname{arcctg} x$</p> <p style="text-align: center;">Свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Область определения: R. 2. Область значений: $(0; \pi)$. 3. Функция убывающая. 4. Функция ни четная, ни нечетная: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ 

Уравнение. Решение уравнения. Равносильные уравнения

Уравнение	Решение уравнения
<p>Уравнением называют равенство, содержащее переменную (неизвестное). Например, $2x + 3 = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ — уравнения</p>	<p>Решением (корнем) уравнения называют значение переменной, при подстановке которого в уравнение получают правильное числовое равенство. Например, число 2 — корень уравнения $x^2 - 2x = 0$, поскольку $2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$</p>
<p>Решить уравнение означает найти его корни или доказать, что их нет</p>	

Равносильные уравнения

Два уравнения называют **равносильными**, если множества их решений совпадают. Например, уравнения $x + 2 = 3$ и $x - 1 = 0$ равносильные, поскольку они имеют общий корень 1 и других корней не имеют.

Решение любого уравнения, как правило, сводится к замене его равносильным уравнением

Основные теоремы о равносильности уравнений

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или выражение с переменной, которое не теряет смысла ни при каком значении переменной, то получим уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $x + 1 = 3$ равносильно уравнению $x = 2$, поскольку второе уравнение можно получить из первого уравнения прибавлением к обеим частям первого уравнения числа -1 (либо первое уравнение можно получить из второго прибавлением к обеим частям второго уравнения числа 1).

2. Если из одной части уравнения перенести во вторую часть слагаемое с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному уравнению. Например, уравнение $x - 3 = 7$ равносильно уравнению $x = 7 + 3$, то есть уравнению $x = 10$.

3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, или на выражение с переменной, которое не превращается в ноль ни при каком значении переменной и не теряет смысла на множестве допустимых значений переменной для данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $5x = 20$ равносильно уравнению $5x : 5 = 20 : 5$, то есть уравнению $x = 4$; уравнение $-\frac{1}{2}x = 5$ равносильно уравнению $-\frac{1}{2}x(-2) = 5 \cdot (-2)$, то есть уравнению $x = -10$

Системы и совокупности уравнений с одной переменной

Система уравнений — уравнения, относительно которых ставится задача: найти общие корни. Знак системы — $\{$.

Например, $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$;

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ (x + 1)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = -1; \end{cases} x = -1$$

Совокупность уравнений — уравнения, относительно которых ставится задача: найти все корни данных уравнений. Знак совокупности — $[$.

Например, $(x^2 - 1)^2(x + 1)^2 = 0$;

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ (x + 1)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = -1; \end{cases} x = \pm 1$$

■ Неравенства. Решение неравенств. Равносильные неравенства ■

Неравенства	Решения неравенств
<p>Неравенством с переменной (неизвестным) называют два выражения с переменной (неизвестным), между которыми стоит один из знаков неравенства: $>$ (больше), $<$ (меньше), \geq (больше или равно; не меньше), \leq (меньше или равно; не больше). Например, $3x + 2 > 6$, $x^2 + x + 1 > 0$ — неравенства с одной переменной</p>	<p>Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое превращает его в правильное числовое неравенство. Например, число 2 — решение неравенства $x + 3 > 4$</p>

Решение неравенств

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество чисел. Ниже в таблице приведены некоторые числовые подмножества, их обозначения, изображения на координатной прямой и запись в виде неравенства

Решения неравенства и их обозначения

Название	Обозначение	Изображение	Запись в виде неравенства
Числовая прямая	$(-\infty; +\infty), R$		$-\infty < x < +\infty$
Замкнутый промежуток (отрезок)	$[a, b]$		$a \leq x \leq b$
Открытый промежуток (интервал)	$(a; b)$		$a < x < b$
Полуоткрытый промежуток	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$
Бесконечный промежуток (луч)	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

Равносильные неравенства

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными. Решение неравенств, как правило, сводится к замене данного неравенства неравенством, равносильным ему

Свойства неравенства с одной переменной

- Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получим равносильное ему неравенство. Например, неравенство $x + 2 > 3$ равносильно неравенству $x + 2 - 2 > 3 - 2$, то есть $x > 1$.
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим равносильное ему неравенство.
Например, $\frac{1}{2}x > 3$ равносильно неравенству $\frac{1}{2}x \cdot 2 > 3 \cdot 2$, то есть $x > 6$.
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, сменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим равносильное ему неравенство. Например, неравенство $-2x < 10$ равносильно неравенству $-2x : (-2) > 10 : (-2)$, то есть $x > -5$

Уравнения и системы уравнений с двумя переменными

Уравнения с двумя переменными

Уравнение, содержащее две переменные (неизвестные), называют **уравнением с двумя переменными (неизвестными)**.

Например, $x - y = 4$, $xy = 12$ — уравнения с двумя переменными

Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, которые превращают это уравнение в правильное числовое равенство. Например, пара чисел $x = 7$ и $y = 3$ является решением уравнения $2x - 4y = 2$

Система уравнений с двумя переменными

Система уравнений с двумя переменными — несколько уравнений, относительно которых ставится задача: найти общие решения. Знак системы — $\{$.

$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y=1 \end{cases}$ — системы уравнений с двумя переменными

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, которая превращает каждое уравнение системы в правильное равенство.

Пара $(2; 3)$ является решением системы $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$

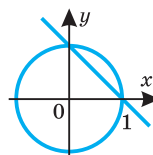
Графический способ решения системы двух уравнений с двумя переменными

Чтобы решить систему уравнений графическим способом, следует:

- 1) выполнить равносильные преобразования системы так, чтобы удобно было строить графики уравнений системы;
 - 2) построить графики;
 - 3) найти координаты точек пересечения построенных линий.
- Эти координаты являются решениями системы.

Построив графики уравнений $x + y = 1$ (прямая), $x^2 + y^2 = 1$ (окружность), находим решения $(1; 0)$, $(0; 1)$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$



Решение системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, следует:

- 1) уравнять коэффициенты при одной переменной путем почленного умножения обоих уравнений на соответствующим образом подобранные множители;
- 2) сложить (вычесть) почленно уравнения системы, исключая одну из переменных;
- 3) решить полученное уравнение с одной переменной;
- 4) значение второй переменной можно найти таким же образом;
- 5) записать ответ.

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+(x-y)=3+1, \\ (x+y)-(x-y)=3-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$$

Решение системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, следует:

- 1) из одного уравнения системы выразить одну переменную через вторую и известные величины;
- 2) найденное значение подставить во второе уравнение системы, получить уравнение относительно второй переменной;
- 3) решить полученное уравнение и найти значение этой переменной;
- 4) подставить найденные значения в выражение для первой переменной, получить соответствующие значения и записать ответ.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 3x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 3(1-y)-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 3-3y-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-0, \\ y=0 \end{cases}$$

Линейные уравнения и неравенства. Системы неравенств с одной переменной. Неполные квадратные уравнения

Линейное уравнение $ax = b$	
Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$	$3x = 6 \Leftrightarrow x = 2, 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Если $a = 0, b \neq 0$, то решений нет	$0x = 5 \Leftrightarrow x = \emptyset$
Если $a = 0, b = 0$, то x — любое число	$0x = 0 \Leftrightarrow x \in R$

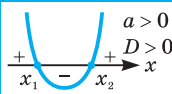
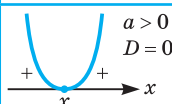
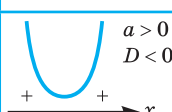
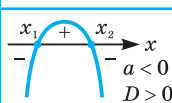
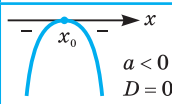
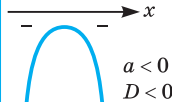
Линейные неравенства					
Неравенство	$a > 0$	$a = 0$			$a < 0$
		$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$	
$ax > b$	$x > \frac{b}{a}, x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$	\emptyset	\emptyset	$x \in R$	$x < \frac{b}{a}, x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$
$ax \geq b$	$x \geq \frac{b}{a}, x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$	\emptyset	$x \in R$	$x \in R$	$x \leq \frac{b}{a}, x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$
$ax < b$	$x < \frac{b}{a}, x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$	$x \in R$	\emptyset	\emptyset	$x > \frac{b}{a}, x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$ax \leq b$	$x \leq \frac{b}{a}, x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$	$x \in R$	$x \in R$	\emptyset	$x \geq \frac{b}{a}, x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$

Системы неравенств с одной переменной	
<p>Система неравенств с одной переменной — неравенства, относительно которых ставится задача найти общие решения.</p> <p>Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, следует:</p> <p>1) отдельно решить каждое неравенство;</p> <p>2) найти пересечение (сечение) найденных решений</p>	
$\begin{cases} x \geq 3, \\ x > 2. \end{cases}$ $x \in [3; +\infty)$	$\begin{cases} 5x + 3 \leq 3, \\ 2x + 1 \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 0, \\ 2x \geq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$ $x = \emptyset$

Неполные квадратные уравнения	
Уравнение вида $ax^2 + c = 0, (b = 0)$	
Если $ac > 0$, то решений нет	$5x^2 + 2 = 0, x^2 = -\frac{2}{5}, x = \emptyset$
Если $ac < 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$5x^2 - 2 = 0, 5x^2 = 2, x^2 = \frac{2}{5}, x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$
Уравнение вида $ax^2 + bx = 0, (c = 0)$	
$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$	$2x^2 + 3x = 0, x(2x + 3) = 0, \begin{cases} x = 0, \\ 2x + 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = -1,5; \end{cases} x \in \{0; -1,5\}$
Уравнение вида $ax^2 = 0$	
Имеет один корень $x = 0$	$5x^2 = 0, x^2 = 0, x = 0$

Квадратные уравнения и неравенства

Квадратные уравнения	
$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант
Если $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x^2 - 2x - 4 = 0; x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2};$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}; x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}; x \in \{1 \pm \sqrt{5}\}$
Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$9x^2 + 6x + 1 = 0;$ $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0; x = -\frac{6}{18}; x = -\frac{1}{3}$
Если $D < 0$, то действительных корней нет	$x^2 + x + 1 = 0;$ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3; x = \emptyset$
Отдельные случаи	
Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0,$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x^2 - 6x + 5 = 0; x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5};$ $x = 3 \pm 2; x_1 = 5, x_2 = 1; x \in \{1; 5\}$
Уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0,$ $a \neq 0, x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{2}$	$3x^2 - 2x - 5 = 0; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 15}}{3};$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{3}; x_1 = 1\frac{2}{3}; x_2 = -1; x \in \left\{1\frac{2}{3}; -1\right\}$

Квадратные неравенства				
Неравенство	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
 $a > 0$ $D > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
 $a > 0$ $D = 0$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	\emptyset	$x \in R$	x_0
 $a > 0$ $D < 0$	$x \in R$	\emptyset	$x \in R$	\emptyset
 $a < 0$ $D > 0$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
 $a < 0$ $D = 0$	\emptyset	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$x \in R$
 $a < 0$ $D < 0$	\emptyset	$x \in R$	\emptyset	$x \in R$

Биквадратные уравнения.

Иррациональные уравнения и неравенства

Биквадратные уравнения	
$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, \\ t^2 - 5t + 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, \\ t = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ x = \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Иррациональные уравнения	
<input type="checkbox"/> ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = g(x), n \in N$	
${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[3]{x-1} = 2; x - 1 = 2^3; x - 1 = 8; x = 9$
<input type="checkbox"/> ${}^{2n}\sqrt{f(x)} = g(x), n \in N$	
${}^{2n}\sqrt{f(x)} = g(x), n \in N \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	$\sqrt{6-x-x^2} = x+1; \begin{cases} 6-x-x^2 = (x+1)^2, \\ x+1 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6-x-x^2 = x^2+2x+1, \\ x \geq -1; \end{cases} \begin{cases} 2x^2+3x-5=0, \\ x \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ x=-2,5, x=1 \\ x \geq -1; \end{cases}$
<input type="checkbox"/> ${}^{2n}\sqrt{f(x)} = {}^{2n}\sqrt{g(x)}, n \in N$	
${}^{2n}\sqrt{f(x)} = {}^{2n}\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$	$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1};$
${}^{2n}\sqrt{f(x)} = {}^{2n}\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-5 = x+1, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ x=-2, x=3 \\ x \geq -1; \end{cases}$

Иррациональные неравенства			
Неравенство	a < 0	a = 0	a > 0
${}^{2n}\sqrt{x} < a$	\emptyset	\emptyset	$0 \leq x < a^{2n}$
${}^{2n}\sqrt{x} > a$	$x \geq 0$	$x > 0$	$x > a^{2n}$
${}^{2n}\sqrt{x} \leq a$	\emptyset	$x = 0$	$0 \leq x \leq a^{2n}$
${}^{2n}\sqrt{x} \geq a$	$x \geq 0$	$x \geq 0$	$x \geq a^{2n}$
${}^{2n+1}\sqrt{x} > a$		$x > a^{2n+1}$	
${}^{2n+1}\sqrt{x} \geq a$		$x \geq a^{2n+1}$	
${}^{2n+1}\sqrt{x} < a$		$x < a^{2n+1}$	
${}^{2n+1}\sqrt{x} \leq a$		$x \leq a^{2n+1}$	

${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$
${}^{2n}\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	${}^{2n}\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
${}^{2n}\sqrt{f(x)} > {}^{2n}\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	

Показательные уравнения и неравенства

Показательные уравнения	
▣ $a^{f(x)} = a^{g(x)}$	
Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = g(x)$	$3^{x+2} = 9^{x+1}$; $3^{x+2} = 3^{2x+2}$; $x + 2 = 2x + 2$; $x = 0$
▣ $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$	
Если $b > 0$, то $f(x) = \log_a b$	$3^x = 2$; $x = \log_3 2$
Если $b \leq 0$, то корней нет	$3^x = -2$. Корней нет
▣ $b_1 a^{m_1 x + h_1} + b_2 a^{m_2 x + h_2} + \dots + b_n a^{m_n x + h_n} = c$	
$b_1 a^{m_1 x + h_1} + b_2 a^{m_2 x + h_2} + \dots + b_n a^{m_n x + h_n} = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{m_1 x} (b_1 a^{h_1} + b_2 a^{h_2} + \dots + b_n a^{h_n}) = c$	$3^{2x-2} + 3^{2x} = 30$; $3^{2x}(3^{-2} + 1) = 30$; $3^{2x} \cdot \left(\frac{1}{9} + 1\right) = 30$; $3^{2x} = 27$; $3^{2x} = 3^3$; $2x = 3$; $x = 1,5$
▣ $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$	
$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = t > 0, \\ At^2 + Bt + C = 0 \end{cases}$	$2^{x+1} + 4^x = 8$; $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$; $\begin{cases} 2^x = t > 0, \\ t^2 + 2t - 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x = t > 0, \\ t = -4, \\ t = 2; \end{cases} \begin{cases} 2^x = -4, \\ 2^x = 2; \end{cases} x = 1$
▣ $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$	
$Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B \left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^x = t > 0, \\ At^2 + Bt + C = 0 \end{cases}$	$6^x + 9^x = 2 \cdot 4^x$; $(2 \cdot 3)^x + 3^{2x} = 2 \cdot 2^{2x}$; $\left(\frac{2 \cdot 3}{3^2}\right)^x + \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$; $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$; $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \\ 2t^2 - t - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \\ t = 1, \\ t = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{1}{2}; \end{cases} x = 0$

Показательные неравенства			
Неравенство	b ≤ 0	b > 0	
		a > 1	0 < a < 1
$a^x < b$, $a > 0$, $a \neq 1$	∅	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
$a^x > b$, $a > 0$, $a \neq 1$	$x \in R$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^{f(x)} < b$, $a > 0$, $a \neq 1$	∅	$f(x) < \log_a b$	$f(x) > \log_a b$
$a^{f(x)} > b$, $a > 0$, $a \neq 1$	$x \in D(f)$	$f(x) > \log_a b$	$f(x) < \log_a b$

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$
Если $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, а $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
Если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, а $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения

□ $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1$

$\log_a x = b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow x = a^b$

$\log_2 x = -3, x = 2^{-3}; x = \frac{1}{8}$

□ $\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1$

$\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = a^b$

$\log_3(x-12) = 2; x-12 = 3^2; x-12 = 9; x = 21$

□ $\log_a f(x) = g(x), a > 0, a \neq 1$

$\log_a f(x) = g(x), a > 0; a \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$

$\log_2(2^{x+1} - 1) = x; \begin{cases} 2^{x+1} - 1 = 2^x, \\ 2^{x+1} - 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} 2^x = 1, \\ 2^{x+1} > 1; \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 0, \\ 2^{x+1} > 1; \end{cases} x = 0$

□ $\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$

$\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0; a \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$

$\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2); \begin{cases} 2x^2 + 3x = 6x + 2, \\ 6x + 2 > 0; \end{cases}$
 $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = -0,5, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases} x = 2$

Логарифмические неравенства

Неравенство	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x < b$	$\begin{cases} x < a^b, \\ x > 0 \end{cases}$	$x > a^b$
$\log_a x > b$	$x > a^b$	$\begin{cases} x < a^b, \\ x > 0 \end{cases}$
$\log_a x \leq b$	$\begin{cases} x \leq a^b, \\ x > 0 \end{cases}$	$x \geq a^b$
$\log_a x \geq b$	$x \geq a^b$	$\begin{cases} x \leq a^b, \\ x > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) < b$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) > a^b$
$\log_a f(x) \leq b$	$\begin{cases} f(x) \leq a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) \geq a^b$
$\log_a f(x) > b$	$f(x) > a^b$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) \geq b$	$f(x) \geq a^b$	$\begin{cases} f(x) \leq a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$

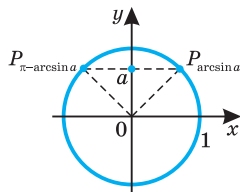
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$

$a > 1 \Rightarrow \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

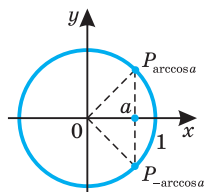
Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств

1. $\sin t = a$. Если $|a| \leq 1$, то $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Если $|a| > 1$, то корней нет



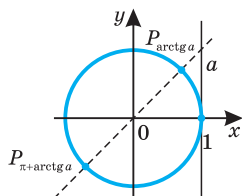
1) $\sin t \leq a$, $|a| < 1$.
 $\pi - \arcsin a + 2\pi k \leq t \leq 2\pi + \arcsin a + 2\pi k$;
2) $\sin t \geq a$, $|a| < 1$.
 $\arcsin a + 2\pi k \leq t \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k$

2. $\cos t = a$. Если $|a| \leq 1$, то $t = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Если $|a| > 1$, то корней нет



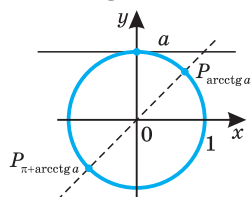
1) $\cos t \leq a$, $|a| < 1$.
 $\arccos a + 2\pi k \leq t \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi k$;
2) $\cos t \geq a$, $|a| < 1$.
 $-\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k$

3. $\operatorname{tg} t = a$. $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$



1) $\operatorname{tg} t \leq a$.
 $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \operatorname{arctg} a + \pi k$;
2) $\operatorname{tg} t \geq a$.
 $\operatorname{arctg} a + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k$

4. $\operatorname{ctg} t = a$. $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$



1) $\operatorname{ctg} t \leq a$.
 $\operatorname{arctg} a + \pi k \leq t < \pi + \pi k$;
2) $\operatorname{ctg} t \geq a$.
 $\pi k < t \leq \operatorname{arctg} a + \pi k$

$\sin t = 0$, $t = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

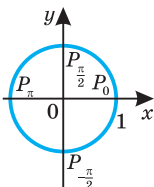
$\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\sin t = -1$, $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

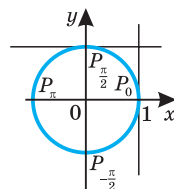
$\cos t = 1$, $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos t = -1$, $t = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$



$\operatorname{tg} t = 0$, $t = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{ctg} t = 0$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$



Производная функции, ее физический и геометрический смысл

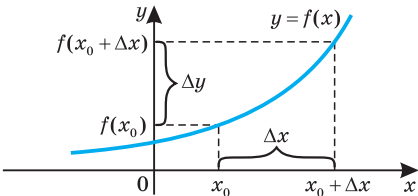
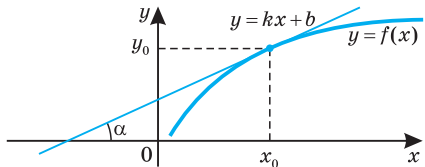
Определение производной	Основные правила дифференцирования
$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 	$(u \pm v)' = u' \pm v';$ $(c \cdot u)' = c \cdot u', \text{ где } c \text{ — некоторое число};$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$ $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ где } c \text{ — некоторое число}$
Операция нахождения производной функции называется дифференцированием	

Таблица производных
$(C)' = 0, C \in R$
$(x)' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Производная сложной функции
$(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Геометрический смысл производной	Физический смысл производной
	Если $S = S(t)$ — зависимость пути от времени, тогда: $v = v(t) = S'(t)$. Скорость — производная пути от времени

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$	Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
--	---

Первообразная и интеграл

Определение	Свойства первообразной
<p>Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Если $f(x) = 1$, то $F(x) = x + C$, так как $(x + C)' = 1$ для всех $x \in R$</p> <p>Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$. $\int 1dx = x + C$; $\int 2xdx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$ для $x \in R$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C \in R$. 2. Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная для функции $kf(x)$ равна $kF(x)$. Первообразная для функции $3e^x$ равна $3e^x$. 3. Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, а первообразная для функции $g(x)$ равна $G(x)$, то первообразная для функции $f(x) \pm g(x)$ равна $F(x) \pm G(x)$. Первообразная для функции $1 + e^x$ равна $x + e^x$. 4. Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная для функции $f(kx + b)$ равна $\frac{1}{k}F(kx + b)$. Первообразная для функции $f(x) = e^{3x+1}$ равна $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$

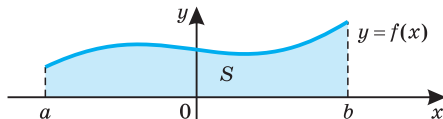
Таблица неопределенных интегралов

Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x) + C$	Неопределенный интеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n, (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Геометрический смысл интеграла

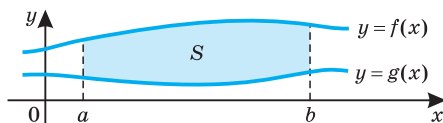
Площадь криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



Вычисление площадей фигур

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = (F(x) - G(x))\Big|_a^b = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$$



Весь школьный курс алгебры в ёмких по содержанию и наглядных по оформлению таблицах!

Справочник поможет:

- быстро повторить и систематизировать знания;
- подготовиться к урокам и экзаменам.

Наглядные справочники школьника
выходят по основным школьным предметам:
**русскому языку, английскому языку,
алгебре, геометрии, физике,
химии, биологии.**

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для среднего школьного возраста
орта мектеп жасындағы балаларға арналған

НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

Роганин Александр Николаевич

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

(орыс тілінде)

Ответственный редактор А. Жилинская
Ведущий редактор Т. Судакова
Художественный редактор И. Успенский

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.

Түпяр бейтәсі: «Эксмо»

Қазақстан Республикасында дистрибутор және анім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
адресі: «RDC-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Дембровский көш., 3-ақ., литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 251 59 89, 90, 91, 92. Факс: 8 (727) 251 58 12. Ич. 107. E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнәнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайты: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания
согласно законодательству
РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: <http://eksmo.ru/certification/>
Өндірген меһлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 06.04.2017.
Формат 70х100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,59.
Тираж 4000 экз. Заказ

Роганин, Александр Николаевич.

P59 Алгебра в таблицах / А. Н. Роганин. —
Москва : Эксмо, 2017. — 32 с. — (Нагляд-
ный справочник школьника).

Справочник содержит информативные табли-
цы за весь школьный курс алгебры (7—11 классы).
Приводятся краткие сведения по всем темам, про-
веряемым на ОГЭ и ЕГЭ. Благодаря наглядности и
доступности материала пособие обеспечивает эф-
фективное повторение предмета при подготовке к
урокам и экзаменам.

УДК 373:512
БКК 22.14я721

ISBN 978-5-699-96240-2

© Роганин А. Н., 2017
© Оформление. ООО «Издательство
«Эксмо», 2017

В оформлении фона обложки использована иллюстрация:
Dario Sabljak / Shutterstock.com
Используется по лицензии от Shutterstock.com

