А. Н. Роганин

Геометрия в таблицах

Наглядный справочник школьника

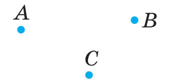
ВЕСЬ КУРС быстро и удобно

Повтори перед ОГЭ и ЕГЭ

Содержание

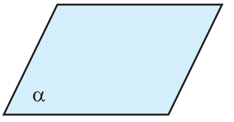
Точки и прямые

Точка — неопределяемое понятие. Представление о точке дает след на листе бумаги, сделанный хорошо заточенным карандашом. Обозначают точки прописными латинскими буквами: A, B, C...



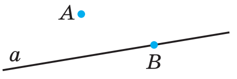
Прямая — неопределяемое понятие. Представление о прямой дают: туго натянутая нить; луч света, проходящий через узкое отверстие. Обозначают прямые строчными латинскими буквами: a, b, c..., или двумя прописными латинскими буквами: AC, BC, AB... Прямая бесконечна

Плоскость — неопределяемое понятие. Представление о плоскости дают: поверхность стола, поверхность оконного стекла, поверхность озера в тихую погоду и т. п. Плоскость представляют неограниченной, идеально ровной и гладкой. Обозначают плоскости строчными греческими буквами: α, β, γ...



Аксиомы принадлежности

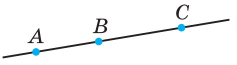
Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие ей, и точки, не принадлежащие ей. $A \notin a$, $B \in a$



Через любые две точки можно провести прямую, и только одну

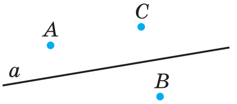
Аксиома расположения точек на прямой

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. Точка B лежит между точками A и C



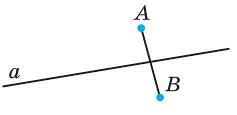
Аксиома расположения точек относительно прямой на плоскости

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки A и C лежат в одной полуплоскости, точки A и B (B и C) лежат в разных полуплоскостях

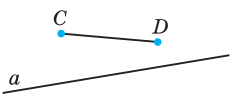


Свойства расположения точек относительно прямой на плоскости

Если точки принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок, соединяющий их, пересекает прямую. Если отрезок пересекает прямую, то концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям относительно этой прямой



Если точки принадлежат одной полуплоскости, то отрезок, соединяющий их, не пересекает прямую. Если отрезок не пересекает прямую, то концы отрезка принадлежат одной полуплоскости относительно этой прямой



Лучи и отрезки

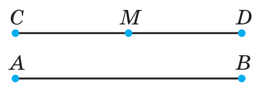
Луч (полупрямая) — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной на ней точки **(начала луча)**. AC — луч

Дополнительные лучи — разные лучи одной и той же прямой с общим началом. Лучи AC и AB — дополнительные

Отрезок — часть прямой, ограниченная двумя точками, включая эти точки

Равные отрезки

Равные отрезки — отрезки, совпадающие при наложении. $CM = MD$, $AB = CD$

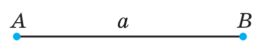


Середина отрезка

Середина отрезка — точка, которая делит отрезок пополам. M — середина CD, $CM = MD$

Измерение отрезков

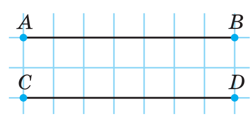
Каждый отрезок имеет определенную длину больше нуля. $AB = a > 0$



Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой. $AC = AB + BC$

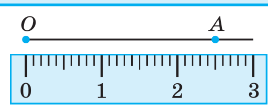
Равные отрезки имеют одинаковую длину

Если отрезки имеют одинаковую длину, то они равны



Откладывание отрезков

На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один

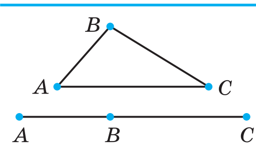


Расстояние между двумя отрезками

Расстояние между двумя точками — длина отрезка с концами в данных точках. **Расстояние между совпадающими точками равно 0**

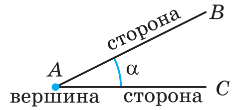
Для любых точек A и B расстояние от A до B равно расстоянию от B до A. $AB = BA$

Для любых трех точек расстояние между двумя из них не больше суммы двух других расстояний. $AC \leq AB + BC$



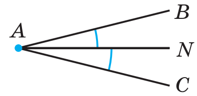
Углы

Углом называется фигура, образованная двумя лучами (которые называются **сторонами**), выходящими из одной точки (которую называют **вершиной**). Обозначение: $\angle BAC$, $\angle\alpha$



Равные углы

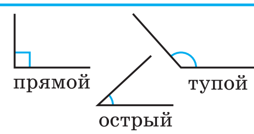
Равные углы — углы, совпадающие при наложении.
$\angle BAN = \angle CAN$



Виды углов

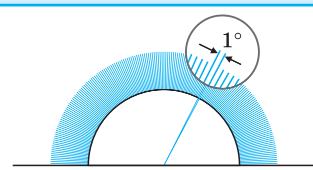
Развернутым называется угол, одна сторона которого является продолжением другой

Прямой угол — угол, составляющий половину развернутого.
Острый угол — угол меньше прямого.
Тупой угол — угол больше прямого, но меньше развернутого



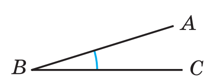
Градусная мера угла

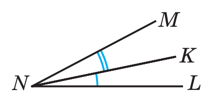
Один градус ($1°$) — это угол, составляющий $1/180$ часть развернутого угла.
Одна минута ($1'$) составляет $1/60$ часть градуса.
Одна секунда ($1''$) составляет $1/60$ часть минуты.
$1° = 60'$, $1' = 60''$



Измерение углов

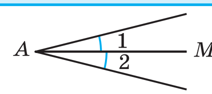
- Каждый угол имеет определенную градусную меру большую нуля. $\angle ABC > 0$.
- Развернутый угол равен $180°$.
- Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами. $\angle MNL = \angle MNK + \angle KNL$
- Равные углы имеют равные градусные меры.
- Если два угла имеют равные градусные меры, то они равны





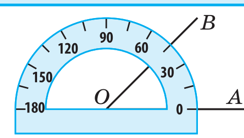
Биссектриса угла

Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины угла и делит угол пополам. AM — биссектриса, $\angle 1 = \angle 2$



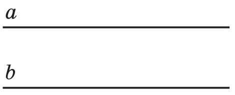
Откладывание углов

От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с данной градусной мерой меньше $180°$, и только один



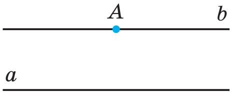
Параллельные прямые

Параллельные прямые — две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Обозначение: $a \parallel b$



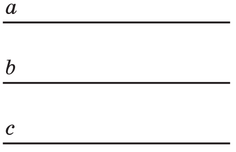
Аксиома параллельности

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой

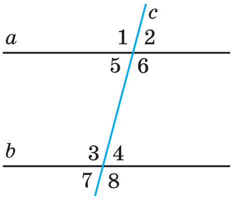


Признаки параллельности

Если две разные прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой. $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$

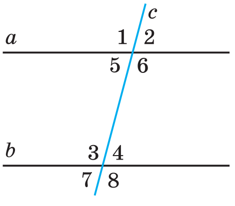


Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, внутренние накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, то прямые параллельны.
Если $\angle 5 + \angle 3 = 180°$ ($\angle 6 + \angle 4 = 180°$), то $a \parallel b$.
Если $\angle 5 = \angle 4$ ($\angle 3 = \angle 6$), то $a \parallel b$.
Если $\angle 1 = \angle 3$ (или $\angle 2 = \angle 4$, или $\angle 5 = \angle 7$, или $\angle 6 = \angle 8$), то $a \parallel b$



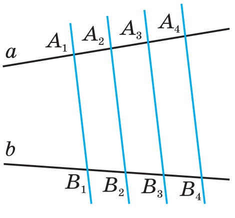
Свойства параллельных прямых

Если две прямые параллельны, то:
- сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
  $\angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6 = 180°$;
- внутренние накрест лежащие углы равны.
  $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$;
- соответственные углы равны.
  $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$



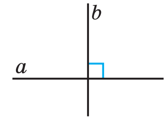
Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложено несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то и на второй прямой отложатся равные отрезки.
Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$



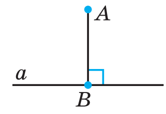
Перпендикулярные прямые

Перпендикулярные прямые — две прямые, пересекающиеся под прямым углом. Обозначение: $a \perp b$



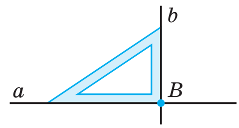
Перпендикуляр к данной прямой

Перпендикуляр к данной прямой — отрезок прямой, перпендикулярной к данной прямой, один из концов которого является точкой их пересечения. Этот конец отрезка называют **основанием перпендикуляра**. AB — перпендикуляр, B — основание перпендикуляра

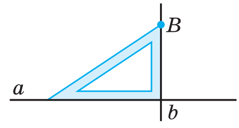


Существование и единственность перпендикулярной прямой

Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую, и только одну

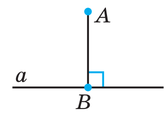


Через каждую точку вне данной прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую, и только одну



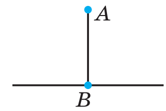
Существование и единственность перпендикуляра к прямой

Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один



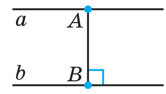
Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую. Если точка лежит на прямой, то считают, что расстояние от этой точки до прямой равно 0



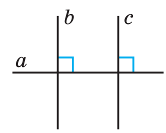
Расстояние между параллельными прямыми

Расстояние между параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой



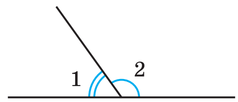
Перпендикулярность и параллельность

Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой. Если $b \perp a$, $c \perp a$, то $b \parallel c$.
Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко второй прямой. Если $b \parallel c$ и $a \perp b$, то $a \perp c$

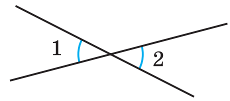


Смежные углы. Вертикальные углы. Центральный угол. Радианная мера угла

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов образуют прямую. Углы 1 и 2 — смежные.
Свойство смежных углов: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

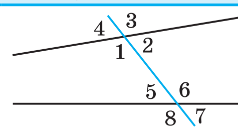


Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного из них являются продолжением сторон другого. Углы 1 и 2 — вертикальные.
Свойство вертикальных углов: $\angle 1 = \angle 2$



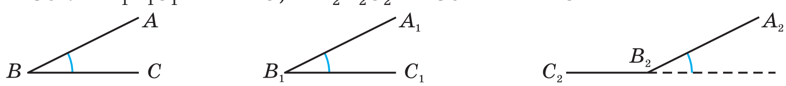
Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей

Углы 2 и 5, 1 и 6 называются **внутренними накрест лежащими**.
Углы 1 и 5, 2 и 6 — **внутренние односторонние**.
Углы 3 и 7, 4 и 8 — **внешние односторонние**.
Углы 3 и 6, 4 и 5, 1 и 8, 2 и 7 — **соответственные**



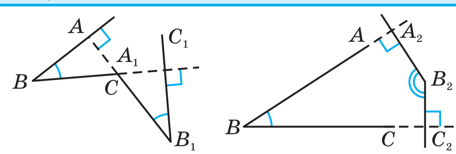
Углы с соответственно параллельными сторонами

Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо в сумме составляют 180°. $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle A_2B_2C_2 = 180° - \angle ABC$



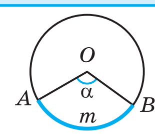
Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо в сумме составляют 180°.
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle A_2B_2C_2 = 180° - \angle ABC$



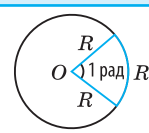
Центральный угол в окружности

Центральный угол в окружности — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный.
Градусная мера дуги окружности — градусная мера соответствующего ей центрального угла. $\cup AB = \angle AOB$. $\alpha = \cup AmB$



Радианная мера угла

1 радиан — центральный угол, который опирается на дугу, равную радиусу окружности.
1 радиан ≈ 57°17′45″, 1° ≈ 0,01745... радиан

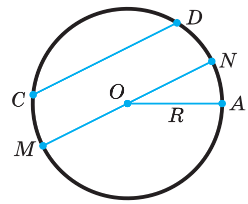


Радианные и градусные меры некоторых углов

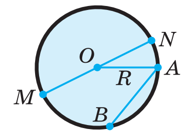
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180

Окружность и круг

Окружность — множество точек плоскости, расстояние которых от данной точки **(центра окружности)** равно данному расстоянию **(радиусу окружности)**.
Радиус окружности — расстояние от центра окружности до точки окружности (отрезок, соединяющий центр окружности с точкой окружности). OA — радиус.
Хорда окружности — отрезок, соединяющий две точки окружности. CD — хорда.
Диаметр окружности — хорда, проходящая через центр окружности. MN — диаметр, $MN = 2OA$

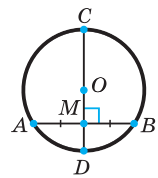


Круг — множество точек плоскости, расстояние которых от данной точки **(центра круга)** не превышает данного расстояния **(радиуса круга)**. Радиус, хорду, диаметр окружности, ограничивающей данный круг, называют **радиусом круга, хордой круга, диаметром круга**

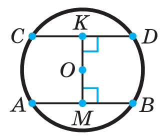


Свойства диаметра и хорд

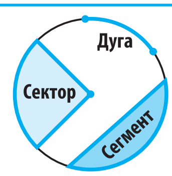
1. Диаметр окружности — наибольшая хорда окружности.
2. Диаметр окружности равен удвоенному радиусу окружности.
3. Диаметр окружности, проведенный перпендикулярно к хорде, делит хорду пополам. $AM = MB$.
4. Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, отличной от диаметра, является перпендикулярным к хорде. $CD \perp AB$



5. Равные хорды окружности равноудалены от центра. Если $AB = CD$ и $OK \perp CD$, $OM \perp AB$, то $OK = OM$.
6. Если две хорды окружности равноудалены от центра, то они равны. Если $OK \perp CD$, $OM \perp AB$, $OK = OM$, то $AB = CD$

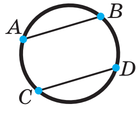


Дуга окружности — часть окружности, ограниченная двумя ее точками.
Круговой сектор — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.
Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости

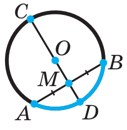


Свойства дуг и хорд

1. Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.
2. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\smile AB = \smile CD$.
3. Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\smile AC = \smile BD$



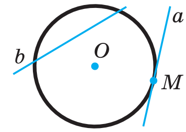
4. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит дугу, которую стягивает хорда, пополам. Если $AB \perp CD$ и CD — диаметр, то $\smile AD = \smile DB$.
5. Если диаметр проходит через середину хорды (отличной от диаметра), то он делит дугу, которую стягивает хорда, пополам. Если $AM = MB$ и CD — диаметр, то $\smile AD = \smile BD$



Касательные и секущие

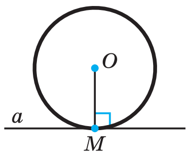
Касательная к окружности — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку (**точку касания**).

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки

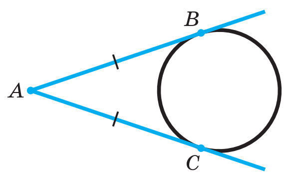


Свойства касательных к окружности

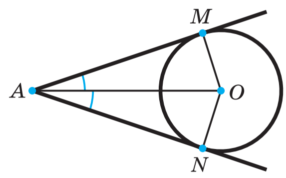
Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. $OM \perp a$.
Если прямая проходит через конец диаметра и перпендикулярна к нему, то эта прямая — касательная



Если из одной точки к данной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой. $AB = AC$



Если окружность касается сторон угла, то центр окружности лежит на биссектрисе угла. AO — биссектриса

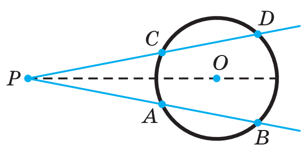


Пропорциональные отрезки в окружности

Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках A, B, C, D, то

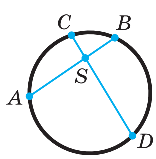
$$AP \cdot BP = CP \cdot DP =$$
$$= (PO - R)(PO + R) =$$
$$= PO^2 - R^2,$$

где R — радиус окружности



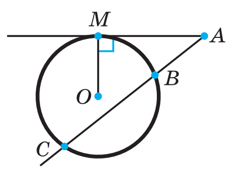
Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS$$



Если из точки вне окружности проведены к ней касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть.

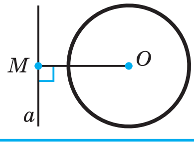
$$AM^2 = AB \cdot AC$$



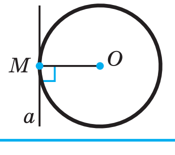
Взаимное расположение прямой к окружности

Если расстояние OM от центра окружности до прямой:

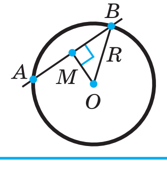
- больше радиуса ($OM > R$), то прямая не имеет общих точек с окружностью



- равно радиусу ($OM = R$), то прямая касается окружности

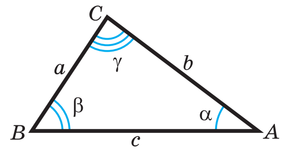


- меньше радиуса ($OM < R$), то окружность отсекает на прямой хорду



Треугольник

Треугольник — фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются **вершинами**, а отрезки — **сторонами**. Обозначение: Δ — треугольник. На рисунке: ΔABC; A, B, C — вершины, AB, BC, AC — стороны



Периметр треугольника: $P = a + b + c$

Полупериметр треугольника: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Неравенство треугольника: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$

Сумма внутренних углов треугольника: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Свойство внешнего угла треугольника:

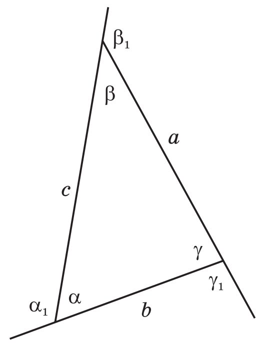
$$\alpha_1 = \beta + \gamma,\ \beta_1 = \alpha + \gamma,\ \gamma_1 = \alpha + \beta$$

Сумма внешних углов треугольника: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$

Теорема косинусов:

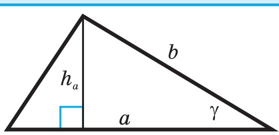
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

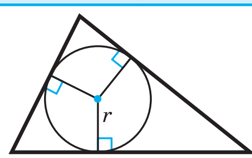


Соотношение между сторонами и углами треугольника: если $b \le a \le c$, то $\beta \le \alpha \le \gamma$; если $\beta \le \alpha \le \gamma$, то $b \le a \le c$

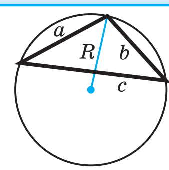
Площадь треугольника



$S = \dfrac{1}{2}ah_a$, $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$



$S = pr$

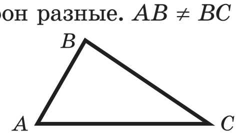


$S = \dfrac{abc}{4R}$

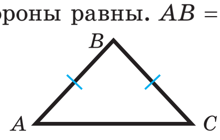
Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Виды треугольников по сторонам

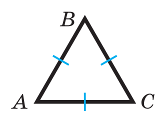
Разносторонний — длины сторон разные. $AB \ne BC \ne AC$



Равнобедренный — две стороны равны. $AB = BC$

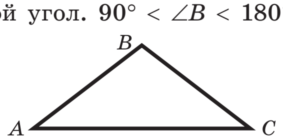


Равносторонний — все стороны равны. $AB = BC = AC$

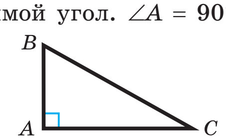


Виды треугольников по углам

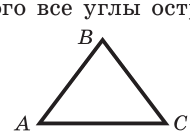
Тупоугольный — имеет тупой угол. $90° < \angle B < 180°$



Прямоугольный — имеет прямой угол. $\angle A = 90°$

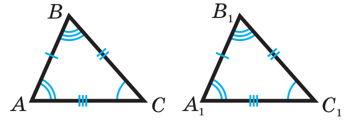


Остроугольный — у которого все углы острые



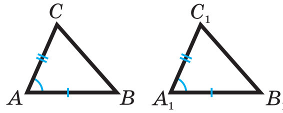
Равные и подобные треугольники

Равные треугольники — треугольники, у которых соответствующие стороны равны и равны соответствующие углы. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означает $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

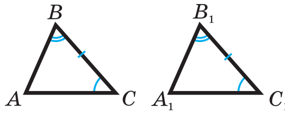


Признаки равенства

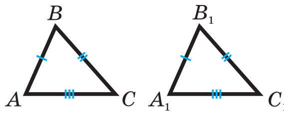
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
Если $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

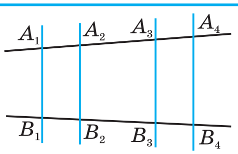


Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



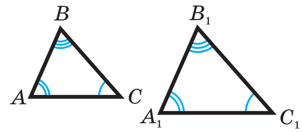
Обобщенная теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложено несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то на ней отложатся отрезки, пропорциональные данным



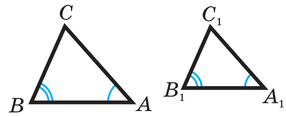
Подобные треугольники с коэффициентом подобия k — треугольники, в которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то есть $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$

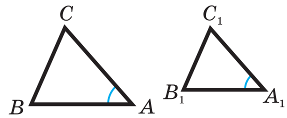


Признаки подобия

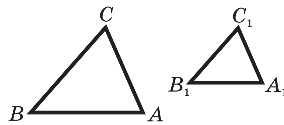
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то эти треугольники подобны.
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

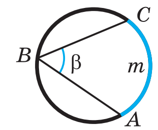


Углы в окружности. Длина окружности, площадь круга

Вписанный угол

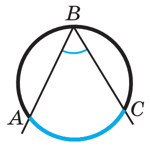
Угол, вписанный в окружность — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

$\angle ABC$ — вписанный. $\angle\beta = \dfrac{\smile AmC}{2}$



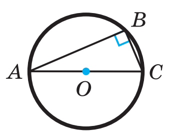
Свойства вписанных углов

Угол равен половине дуги, на которую он опирается.



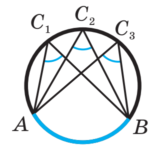
$\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$

Угол, опирающийся на диаметр, является прямым.



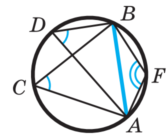
$\angle ABC = 90°$

Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



$\angle AC_1B = \angle AC_2B = \angle AC_3B$

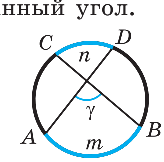
Углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, либо равны, либо их сумма равна 180°.



$\angle ACB = \angle ADB$,
$\angle ACB + \angle BFA = 180°$

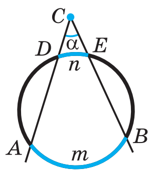
Другие углы

Угол с вершиной в середине окружности равен половине суммы дуг, принадлежащих вертикальным углам, одним из которых является данный угол.



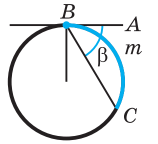
$\gamma = \dfrac{\smile AmB + \smile CnD}{2}$

Угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, равен половине разности дуг, лежащих внутри угла.



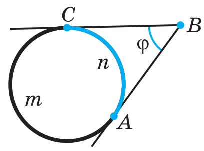
$\alpha = \dfrac{\smile AmB - \smile DnE}{2}$

Угол, образованный касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, лежащей внутри угла.



$\beta = \dfrac{\smile BmC}{2}$

Угол между двумя касательными к окружности, проведенными через одну точку, равен половине разности дуг, ограниченных его сторонами.



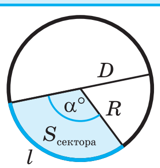
$\varphi = \dfrac{\smile AmC - \smile AnC}{2}$

Длина окружности, площадь круга

Длина окружности: $C = 2\pi R$, $C = \pi D$

Площадь круга: $S = \pi R^2$, $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$

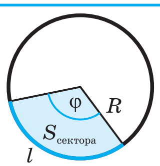
Длина дуги в α°: $l = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$



Площадь сектора в α°:

$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$$

Длина дуги в φ радиан: $l = R\varphi$



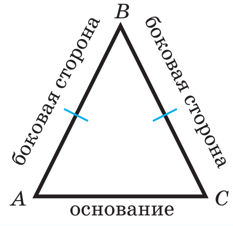
Площадь сектора в φ радиан:

$$S = \frac{1}{2}R^2\varphi$$

Равнобедренный и равносторонний треугольники

Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.
Равные стороны называют **боковыми сторонами**, а третью сторону — **основанием.**
ΔABC — равнобедренный, AB и BC — боковые стороны, AC — основание



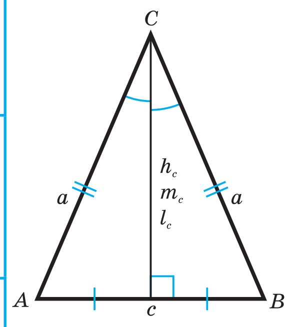
Свойство углов при основании: у равнобедренного треугольника углы при основании равны.

$$\angle A = \angle B = \frac{180° - \angle C}{2}$$

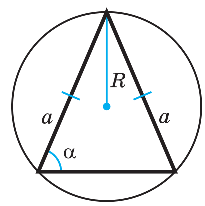
Свойство медианы, высоты и биссектрисы, проведенных к основанию: медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

$$h_c = m_c = l_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

Площадь треугольника: $S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$



Радиус описанной окружности: $R = \frac{a^2}{2h_c}$, $\quad R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$



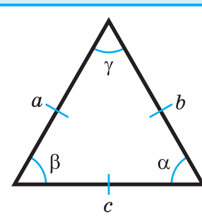
Равносторонний (правильный) треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним:** $a = b = c$

Свойство углов: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

Периметр: $P = 3a$

Площадь: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



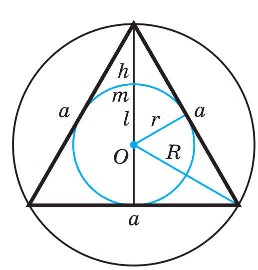
Радиус описанной окружности: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Радиус вписанной окружности: $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Соотношение между радиусом описанной окружности и радиусом вписанной окружности: $R = 2r$

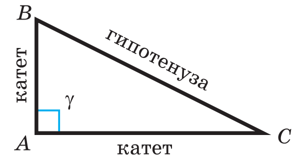
Свойства медиан, высот, биссектрис:

$$h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол.
$\gamma = 90°$, AB и AC — катеты, BC — гипотенуза



Свойство острых углов: $\alpha + \beta = 90°$

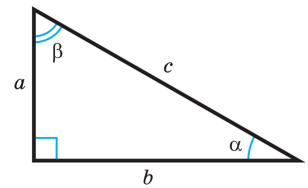
Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Площадь: $S = \dfrac{ab}{2}$

Зависимость между сторонами и углами:

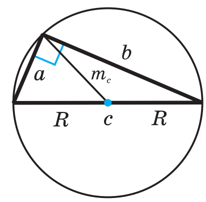
$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta, \quad a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta$$

Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$



Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{c}{2}$

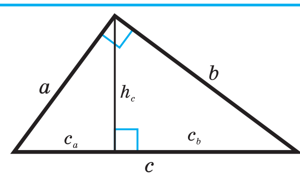
Медиана, проведенная к гипотенузе: $m_c = R = \dfrac{c}{2}$



Метрические соотношения:

$$h_c^2 = c_a \cdot c_b, \quad a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b,$$

где c_a и c_b — проекции катетов на гипотенузу



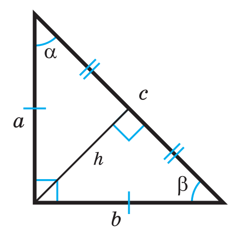
Равнобедренный прямоугольный треугольник

Свойство катета: $a = b = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$

Свойство углов: $\alpha = \beta = 45°$

Высота, проведенная к гипотенузе: $h = \dfrac{c}{2}$

Площадь: $S = \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$



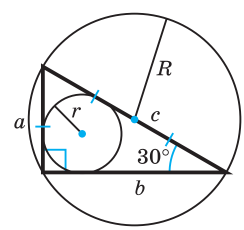
Прямоугольный треугольник с углом 30°

Свойство катета, лежащего напротив угла 30°: $a = \dfrac{c}{2}$

Радиус описанной окружности: $R = a$

Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{b-a}{2}$

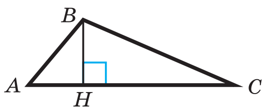
Площадь: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{8}$



Интересные линии в треугольнике

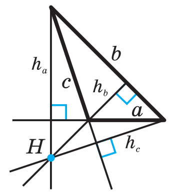
Высоты

Высота треугольника — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону. BH — высота треугольника



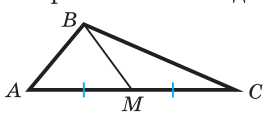
Высоты пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.**

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

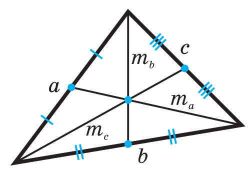


Медианы

Медиана треугольника — отрезок соединяющий вершину угла треугольника с серединой противоположной стороны. BM — медиана



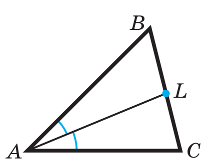
Медианы пересекаются в одной точке, называемой **центром тяжести (масс).**
Точкой пересечения каждая медиана делится в соотношении 2 : 1 (считая от вершины).



$$m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2};\quad m_a+m_b+m_c=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

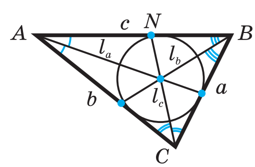
Биссектрисы

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину угла с точкой противоположной стороны.
AL — биссектриса

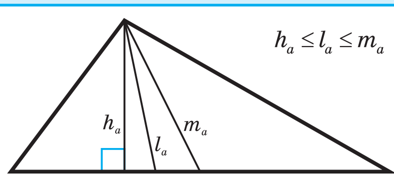


Биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности.

$$\frac{AN}{NB}=\frac{b}{a}$$



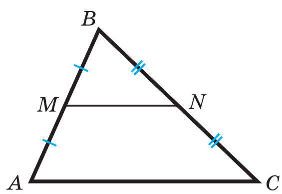
Соотношение между высотой, биссектрисой и медианой треугольника



$$h_a \le l_a \le m_a$$

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.
MN — средняя линия



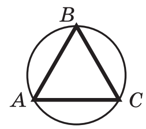
Свойство средней линии треугольника: средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

$$MN \parallel AC,\quad MN=\frac{AC}{2}$$

Вписанные и описанные треугольники. Геометрическое место точек

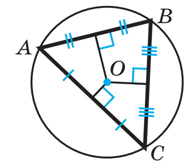
Вписанные треугольники

Окружность, описанная около треугольника — окружность, содержащая вершины треугольника. Треугольник при этом называют **вписанным**.
Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну



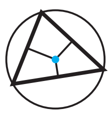
Центр описанной окружности — точка пересечения срединных перпендикуляров

Радиус описанной окружности: $R=\dfrac{abc}{4S}$, $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{b}{2\sin\beta}=\dfrac{c}{2\sin\gamma}$

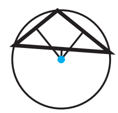


Центр окружности лежит

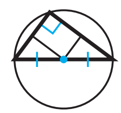
Внутри треугольника, если треугольник остроугольный



Вне треугольника, если треугольник тупоугольный

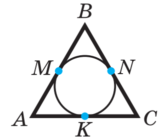


На середине гипотенузы, если треугольник прямоугольный



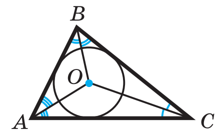
Описанные треугольники

Окружность, вписанная в треугольник — окружность, касающаяся всех сторон треугольника. *M, N, K* — точки касания. Треугольник при этом называют **описанным**.
В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну



Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника. $\angle BAO=\angle CAO$, $\angle ABO=\angle CBO$, $\angle BCO=\angle ACO$

Радиус вписанной окружности: $r=\dfrac{S}{p}$, где p — полупериметр



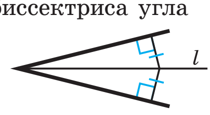
Геометрическое место точек

Геометрическое место точек — фигура, состоящая из всех точек плоскости, имеющих определенное свойство

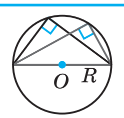
Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является срединный перпендикуляр отрезка, соединяющего эти точки

Геометрическим местом точек, удаленных на данное расстояние от точки, является окружность с центром в данной точке

Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного угла (меньше развернутого), является биссектриса угла



Геометрическим местом вершин прямоугольных треугольников с данной гипотенузой является окружность, построенная на гипотенузе как на диаметре (за исключением концов гипотенузы)



Тригонометрические функции

Синус острого угла прямоугольного треугольника — отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\quad \sin\beta=\frac{b}{c}.$$

Косинус острого угла прямоугольного треугольника — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c};\quad \cos\beta=\frac{a}{c}.$$

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}.$$

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника — отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a};\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{a}{b}$$

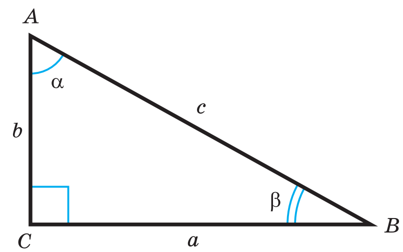
Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$



Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Формулы дополнительных углов

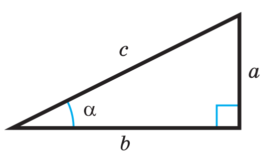
Дополнительные углы — два угла, сумма которых равна 90°:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$



Тригонометрические функции тупых углов

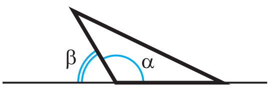
Косинус, тангенс и котангенс тупого угла противоположны соответственно косинусу, тангенсу и котангенсу угла, смежного с тупым:

$$\cos\alpha=-\cos\beta;\ \operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}\beta.$$

Синусы смежных углов равны:

$$\sin\alpha=\sin\beta$$



Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника

- Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$: $a=c\sin\alpha$.
- Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$: $b=c\cos\alpha$.
- Катет, противолежащий углу α, равен произведению другого катета на $\operatorname{tg}\alpha$: $a=b\operatorname{tg}\alpha$.
- Катет, прилежащий к углу α, равен произведению другого катета на $\operatorname{ctg}\alpha$: $b=a\operatorname{ctg}\alpha$

Четырехугольник. Трапеция

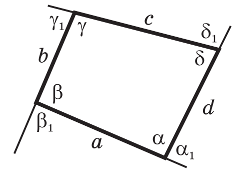
Произвольный четырехугольник

Периметр: $P = a + b + c + d$

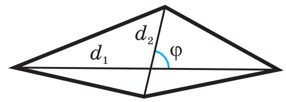
Полупериметр: $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Сумма внутренних углов: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

Сумма внешних углов: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ$



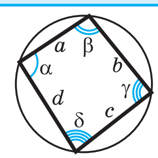
Площадь: $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2$



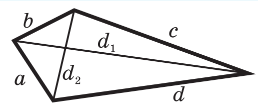
Вписанный четырехугольник

Свойство углов: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

Площадь: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



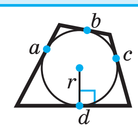
Теорема Птолемея: $d_1 d_2 = ac + bd$



Описанный четырехугольник

Свойство сторон: $a + c = b + d$

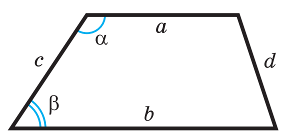
Площадь: $S = pr$



Трапеция

Четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны, называется **трапецией**. $a \parallel b$; a, b — основания; c, d — боковые стороны

Свойство углов прилежащих к одной боковой стороне: $\alpha + \beta = 180^\circ$

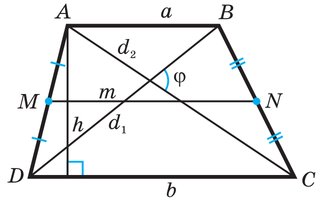


Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией**

Свойство средней линии: $MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$,

$$m = MN = \frac{a+b}{2}$$

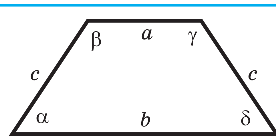
Площадь: $S = \dfrac{a+b}{2} h$, $S = mh$, $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$



Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной** или **равнобочной**

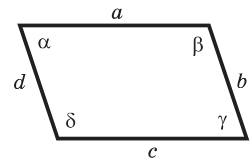
Свойство углов: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$, $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$

Свойство диагоналей: $d_1 = d_2$



Параллелограммы

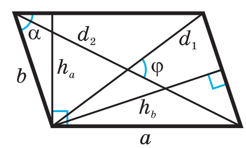
Четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны, называется **параллелограммом**. $a \parallel c$, $b \parallel d$



Свойства сторон: $a = c$, $b = d$

Свойства углов: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = \alpha + \beta = \delta + \gamma = 180°$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$

Площадь: $S = ah_a$, $S = ab\sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

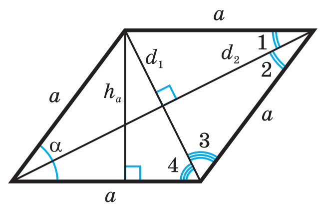


Свойства диагоналей параллелограмма: диагонали точкой пересечения делятся пополам

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Ромб

Параллелограмм, у которого стороны равны, называется **ромбом**



Свойства диагоналей: $d_1 \perp d_2$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$

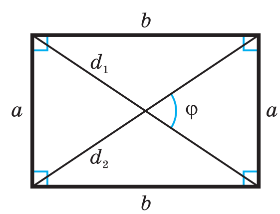
Соотношение между стороной и диагоналями:

$$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Площадь: $S = ah$, $S = a^2 \sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

Прямоугольник

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником**: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$



Свойство диагоналей: $d_1 = d_2$

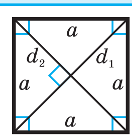
Соотношение между сторонами и диагоналями:

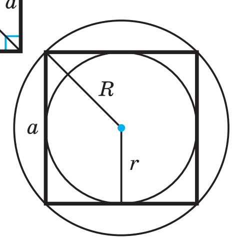
$$d^2 = a^2 + b^2$$

Площадь: $S = ab$, $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$

Квадрат (правильный четырехугольник)

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**





Диагонали: $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$

Площадь: $S = a^2$, $S = \frac{1}{2}d^2$

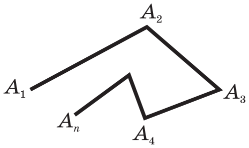
Радиус вписанной окружности (r): $r = \frac{a}{2}$

Радиус описанной окружности (R): $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Ломаная. Многоугольник

Ломаная

Ломаная $A_1A_2A_3...A_n$ — фигура, состоящая из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, их соединяющих. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют **вершинами ломаной**, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — **звеньями ломаной**



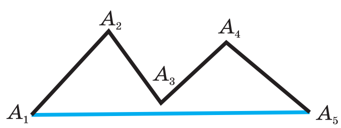
Простая ломаная — ломаная, не имеющая точек самопересечения.

Замкнутая ломаная — ломаная, концы которой совпадают.

Длина ломаной — сумма длин ее звеньев

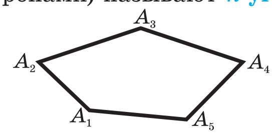
Длина ломаной не меньше длины отрезка, который соединяет ее концы:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 \geq A_1A_5$$



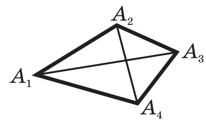
Многоугольник

Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой; вершины ломаной называют **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника**. Многоугольник с n вершинами (n сторонами) называют **n-угольником**



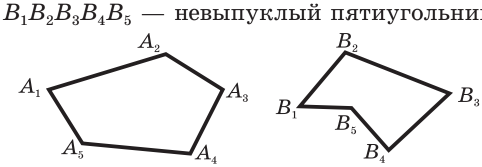
Диагонали многоугольника — отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника.

A_1A_3 и A_2A_4 — диагонали



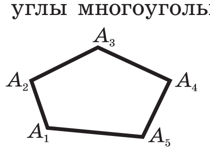
Выпуклый многоугольник — многоугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — выпуклый пятиугольник;
$B_1B_2B_3B_4B_5$ — невыпуклый пятиугольник

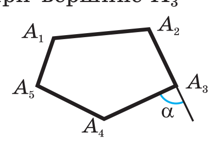


Углы многоугольника

Угол выпуклого многоугольника при данной вершине — угол, образованный его сторонами, которые сходятся в этой вершине. $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$, $\angle A_3A_4A_1$, $\angle A_4A_1A_2$ — углы многоугольника

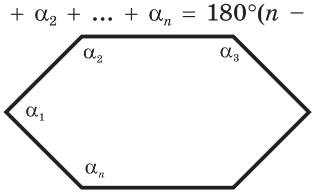


Внешний угол выпуклого многоугольника при данной вершине — угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине. α — внешний угол пятиугольника при вершине A_3

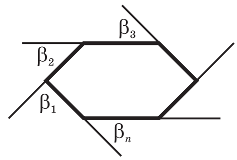


Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна: $180°(n - 2)$.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 180°(n - 2)$$



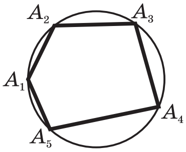
Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$. $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n = 360°$



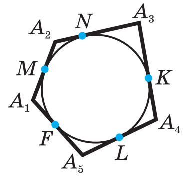
Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники

Вписанные и описанные многоугольники

Многоугольник, вписанный в окружность — многоугольник, все вершины которого лежат на некоторой окружности. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — вписанный пятиугольник (окружность описана около пятиугольника)



Многоугольник, описанный около окружности — многоугольник, все стороны которого касаются некоторой окружности. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — описанный пятиугольник (окружность вписана в пятиугольник). M, N, K, L, F — точки касания

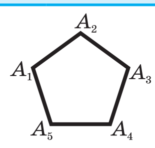


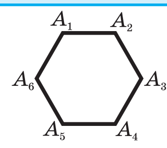
Центр окружности, описанной около многоугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон

Центр окружности, вписанной в многоугольник — точка пересечения биссектрис внутренних углов

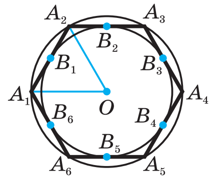
Правильные многоугольники

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.
$A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный пятиугольник,
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный шестиугольник



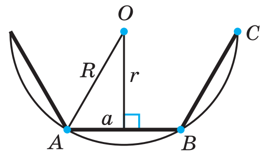


Центр правильного многоугольника — центр вписанной окружности и центр описанной окружности.
Центральный угол многоугольника — угол, под которым видно сторону правильного многоугольника из его центра.
$\angle A_1OA_2$ — центральный угол правильного шестиугольника



Радиус описанной окружности (R): $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$

Радиус вписанной окружности (r): $r=\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$



Площадь: $S=\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$

Свойство углов:

$$\angle AOB=\frac{180^\circ}{n},$$

$$\angle ABC=\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$$

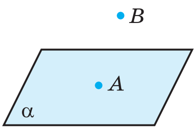
Нахождение				
	r через a	R через a	a через r	a через R
▲	$r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$a=2\sqrt{3}r$	$a=\sqrt{3}R$
■	$r=\dfrac{a}{2}$	$R=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	$a=2r$	$a=\sqrt{2}R$
⬢	$r=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$	$R=a$	$a=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$	$a=R$

Нахождение площади			
	через a	через r	через R
▲	$S=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S=3\sqrt{3}r^2$	$S=\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
■	$S=a^2$	$S=4r^2$	$S=2R^2$
⬢	$S=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S=2\sqrt{3}r^2$	$S=\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$

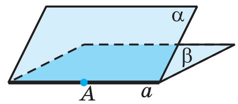
Аксиомы стереометрии и выводы из них. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Аксиомы стереометрии

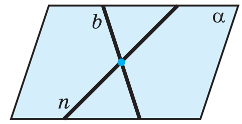
1. Какой бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости и точки, не принадлежащие ей. $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$



2. Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Если $A \in \alpha$, $A \in \beta$, то α и β пересекаются по прямой a, причем $A \in a$

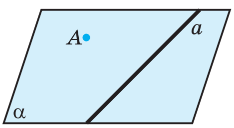


3. Если две разные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, причем только одну

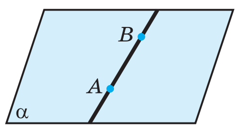


Следствия из аксиом стереометрии

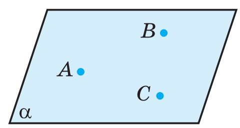
1. Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, причем только одну



2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости

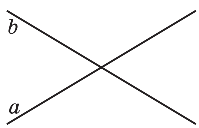


3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, причем только одну

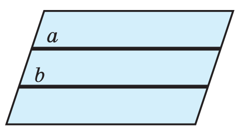


Взаимное расположение двух прямых в пространстве

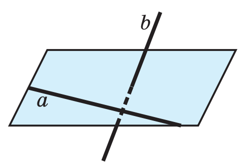
Две пересекающиеся прямые — две прямые, имеющие только одну общую точку.
Прямые a и b пересекаются



Параллельные прямые — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек.
Прямые a и b параллельны: $a \parallel b$

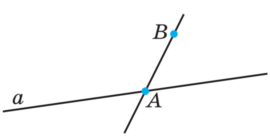


Скрещивающиеся прямые — две прямые, не лежащие в одной плоскости. Прямые a и b скрещиваются



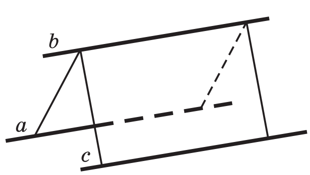
Признак

Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая точка лежит вне ее, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, пересекаются



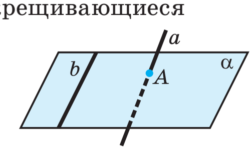
Признак

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.
Если $a \parallel b$, $c \parallel b$, то $a \parallel c$



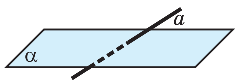
Признак

Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые — скрещивающиеся

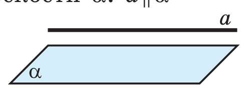


Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая, пересекающая плоскость — прямая, имеющая только одну общую точку с плоскостью.
Прямая a и плоскость α пересекаются

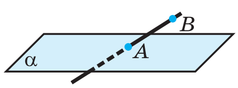


Прямая, параллельная плоскости — прямая, не имеющая общих точек с плоскостью.
Прямая a параллельна плоскости α. $a \parallel \alpha$

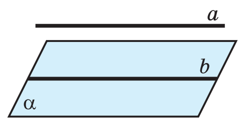


Прямая, лежащая в плоскости — прямая, каждая точка которой принадлежит плоскости.
Прямая a лежит в плоскости α. $a \subset \alpha$

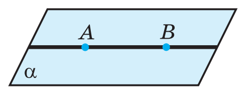
Признак
Если одна точка лежит в плоскости, а другая точка не лежит в этой плоскости, то прямая, проходящая через эти точки, пересекает плоскость



Признак
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой этой плоскости, то она параллельна этой плоскости

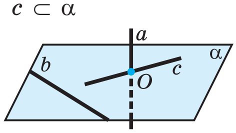


Признак
Если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, то пряма лежит в этой плоскости

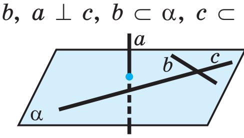


Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая, перпендикулярная плоскости — прямая, перпендикулярная к любой прямой, лежащей в этой плоскости.
Прямая a, перпендикулярна к плоскости α ($a \perp \alpha$), то есть $a \perp b$, $a \perp c$, где $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$

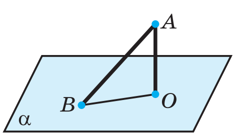


Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к двум прямым, лежащим в некоторой плоскости и пересекающимся, то она перпендикулярна к данной плоскости.
Если $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, то $a \perp \alpha$

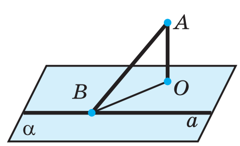


Перпендикуляр и наклонная

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость — отрезок, который соединяет данную точку с точкой на плоскости и лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости.
Наклонная, проведенная из данной точки к плоскости — любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости.
AO — перпендикуляр к плоскости α, AB — наклонная к плоскости α, BO — проекция наклонной AB на плоскость α

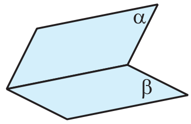


Теорема о трех перпендикулярах: если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна к ее проекции, то она перпендикулярна и к наклонной. Если $a \perp BO$, то $a \perp AB$.
Если прямая на плоскости перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к проекции наклонной. Если $a \perp AB$, то $a \perp BO$

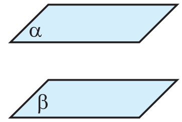


Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Две пересекающиеся плоскости — две разные плоскости, имеющие общие точки. Плоскости α и β пересекаются

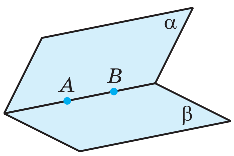


Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек. Плоскости α и β параллельны: $\alpha \parallel \beta$

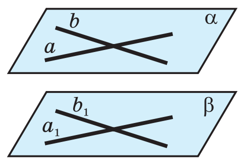


Признаки

Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку

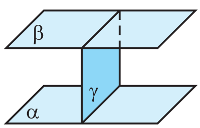


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
Если $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \parallel \beta$

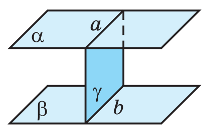


Свойства параллельных плоскостей

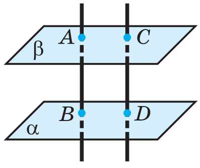
Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую



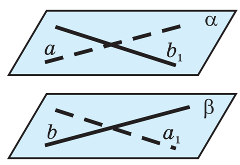
Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. Если $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$



Отрезки параллельных прямых, расположенные между двумя параллельными плоскостями, равны. Если $\alpha \parallel \beta$, $AB \parallel CD$, то $AB = CD$

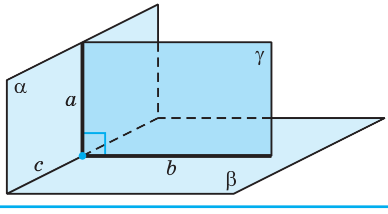


Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости

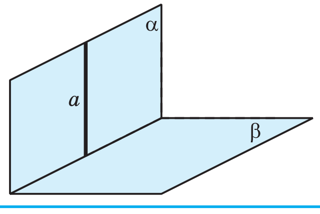


Перпендикулярность плоскостей

Перпендикулярные плоскости — две пересекающиеся плоскости при условии, если третья плоскость, перпендикулярна к линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым.
Плоскости α и β перпендикулярны ($\alpha \perp \beta$), если $\gamma \perp c$, γ пересекает α и β по прямым a и b, и $a \perp b$

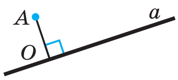


Признак перпендикулярности плоскостей. Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны. Если $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$

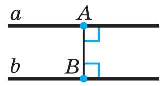


Расстояния и углы в пространстве

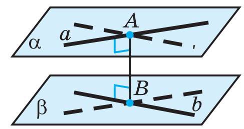
Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. AO — расстояние от точки A до прямой a



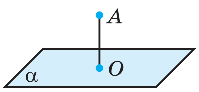
Расстояние между параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой. AB — расстояние между прямыми a и b



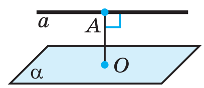
Расстояние между скрещивающимися прямыми — длина их общего перпендикуляра (отрезка, перпендикулярного к прямым, концы которого лежат на этих прямых). AB — расстояние между прямыми a и b



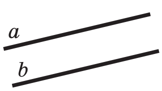
Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. $AO \perp \alpha$, AO — расстояние от точки A до плоскости α



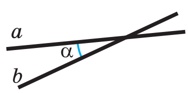
Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — расстояние от любой точки этой прямой до плоскости. AO — расстояние от прямой a до плоскости α



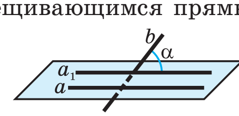
Угол между параллельными прямыми (или совпадающими прямыми) считается равным $0°$



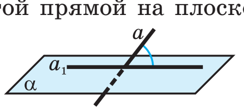
Угол между пересекающимися прямыми — меньший из углов, которые образуются при пересечении прямых. $0° < \alpha \leq 90°$



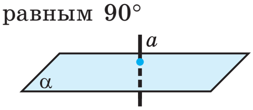
Угол между скрещивающимися прямыми — угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся прямым



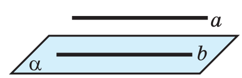
Угол между плоскостью и прямой, пересекающей плоскость — угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость



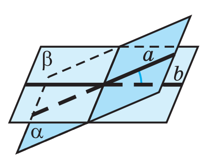
Угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной к плоскости, считается равным $90°$



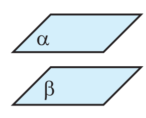
Угол между прямой и плоскостью, которая параллельна прямой или содержит эту прямую, считается равным $0°$



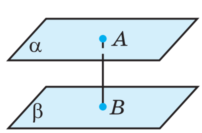
Угол между пересекающимися плоскостями — угол между прямыми, по которым данные плоскости пересекаются плоскостью, перпендикулярной к прямой их пересечения



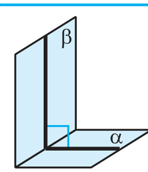
Угол между параллельными плоскостями или совпадающими плоскостями считается равным $0°$



Расстояние между параллельными плоскостями — расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости. AB — расстояние между плоскостями α и β

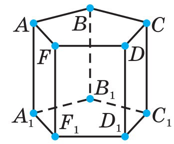


Угол между перпендикулярными плоскостями равен $90°$



Призма

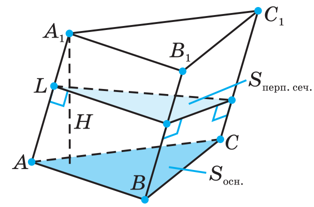
***n*-угольной призмой** называется многогранник, две грани (основания) которого — равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами, а другие n граней (боковые грани) — параллелограммы



Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = P_{\text{перп. сеч.}} \cdot L$, где L — боковое ребро

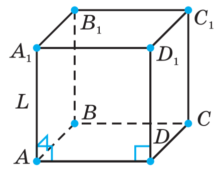
Площадь поверхности: $S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$

Объем призмы: $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, $V = S_{\text{перп. сеч.}} \cdot L$, где L — боковое ребро



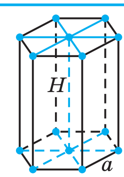
Прямая призма — призма, боковые ребра которой перпендикулярны основанию

Площадь боковой поверхности:
$S_{\text{бок.}} = P_{\text{перп. сеч.}} \cdot L$, где L — боковое ребро



Прямая призма, основания которой — правильные многоугольники, называется **правильной**

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = naH$

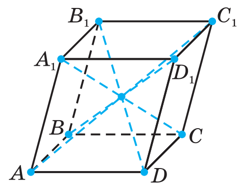


Призма, основания которой — параллелограммы, называется **параллелепипедом**

Свойства диагоналей:

$$AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 = 4(AA_1^2 + AB^2 + AD^2);$$

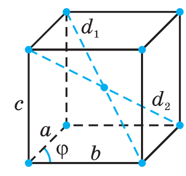
$AO = OC_1$, $BO = OD_1$, $CO = OA_1$, $DO = OB_1$, где O — точка пересечения диагоналей



Прямой параллелепипед — параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к основанию

Свойства диагоналей:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\varphi; \quad d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi$$

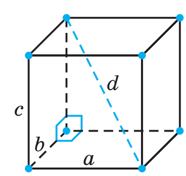


Прямой параллелепипед, основание которого — прямоугольник, называется **прямоугольным**

Свойство диагоналей: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Площадь поверхности: $S = 2(ab + bc + ac)$

Объем: $V = abc$



Пирамида

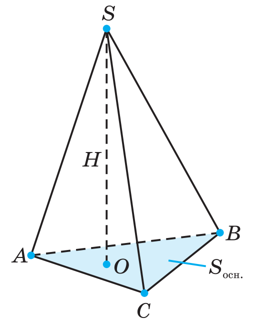
n-угольной пирамидой называется многогранник, одна грань (основание) которого — n-угольник, а другие n граней (боковые грани) — треугольники с общей вершиной

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC}$$

Площадь поверхности: $S = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$

Объем: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$



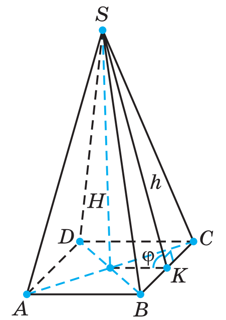
Пирамида, у которой основание является правильным многоугольником, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника, называется **правильной**

Площадь боковой поверхности:

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $h = SK$ — апофема ($SK \perp BC$);

$S_{\text{бок.}} = n \cdot S_{\Delta ABS}$; $S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi}$

Объем: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$



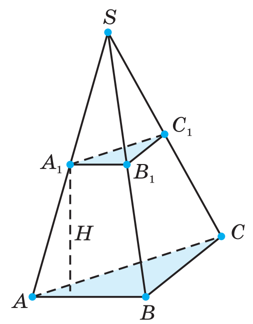
Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, которая находится между ее основанием и секущей плоскостью сечения, параллельной основанию

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + S_{ACC_1A_1}$$

Площадь поверхности:
$S = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$, де S_1, S_2 — площади оснований

Объем: $V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$



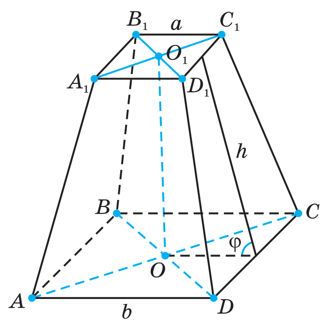
Правильная усеченная пирамида — усеченная пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h$, где P_1, P_2 — периметры оснований;

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} n(a+b)h$;

$S_{\text{бок.}} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}$, где S_1, S_2 — площади оснований



Правильные многогранники

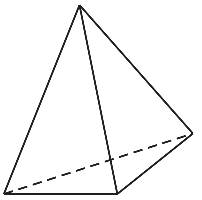
Правильный тетраэдр

Площадь поверхности: $S=a^2\sqrt{3}$

Объем: $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Радиус описанной сферы: $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Радиус вписанной сферы: $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$



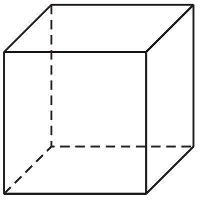
Правильный куб (гексаэдр)

Площадь поверхности: $S = 6a^2$

Объем: $V = a^3$

Радиус описанной сферы: $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Радиус вписанной сферы: $r=\dfrac{a}{2}$



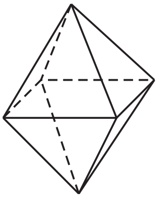
Правильный октаэдр

Площадь поверхности: $S=2a^2\sqrt{3}$

Объем: $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Радиус описанной сферы: $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Радиус вписанной сферы: $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$



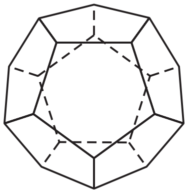
Правильный додекаэдр

Площадь поверхности: $S=3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$

Объем: $V=\dfrac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$

Радиус описанной сферы: $R=\dfrac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$

Радиус вписанной сферы: $r=\dfrac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$



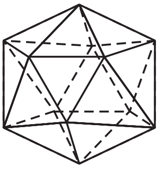
Правильный икосаэдр

Площадь поверхности: $S=5a^2\sqrt{3}$

Объем: $V=\dfrac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$

Радиус описанной сферы: $R=\dfrac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$

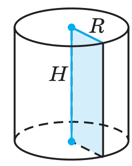
Радиус вписанной сферы: $r=\dfrac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$



Тела вращения

Цилиндр

Цилиндром называется тело вращения, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон



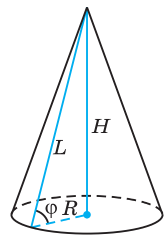
Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH$

Площадь поверхности: $S = 2\pi R(R + H)$

Объем: $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 H$

Конус

Конусом называется тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов



Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = \pi RL$

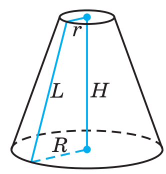
Площадь поверхности: $S = \pi R(R + L)$

Площадь основания: $S_{\text{осн.}} = \pi R^2 = S_{\text{бок.}} \cdot \cos\varphi$

Объем: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Усеченный конус

Усеченным конусом называется тело вращения, образованное вращением прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны



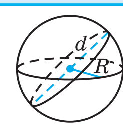
Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = \pi L(R + r)$

Площадь поверхности: $S = \pi L(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

Объем: $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$

Шар, сфера

Шаром (сферой) называется тело (поверхность) вращения, образованное вращением круга (окружности) вокруг диаметра

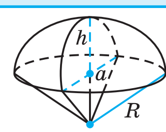


Площадь сферы: $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$

Объем: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$

Шаровой сектор

Шаровым сектором называется тело, образованное вращением сектора вокруг оси, проходящей через его центр

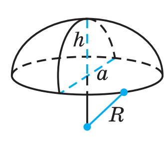


Площадь поверхности: $S = \pi R(2h + a)$

Объем: $V = \frac{2\pi R^2 h}{3}$

Шаровой сегмент

Шаровым сегментом называется тело, отсекаемое от шара плоскостью



Соотношение между a, h, R: $a^2 = h(2R - h)$

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH = \pi(h^2 + a^2)$

Площадь поверхности: $S = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2)$

Объем: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

Координаты и векторы

Координаты вектора: $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, где $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

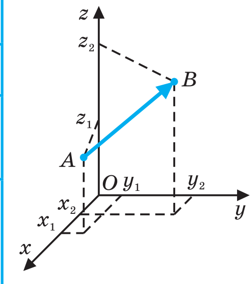
Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где $\vec{a}\,(x;\ y;\ z)$

Расстояние между точками:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

Координаты середины отрезка: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$;

$z_C = \dfrac{z_A + z_B}{2}$, где $AC = BC$, $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

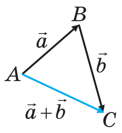


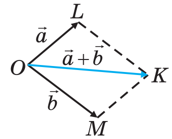
Сложение векторов:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (правило треугольника),

$\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK}$ (правило параллелограмма).

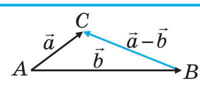
$\vec{a}(x_1;\, y_1;\, z_1) + \vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2) = \vec{c}(x_1 + x_2;\, y_1 + y_2;\, z_1 + z_2)$



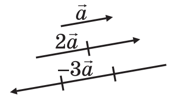


Вычитание векторов: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

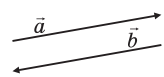
$\vec{a}(x_1;\, y_1;\, z_1) - \vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2) = \vec{c}(x_1 - x_2;\, y_1 - y_2;\, z_1 - z_2)$



Умножение вектора на число: $\lambda \cdot \vec{a}(x;\, y;\, z) = \vec{c}(\lambda x;\, \lambda y;\, \lambda z)$



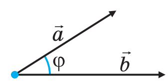
Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$, где $\vec{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$



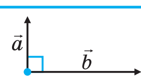
Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, где $\vec{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$

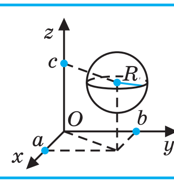
Угол между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$



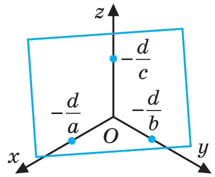
Условие ортогональности векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



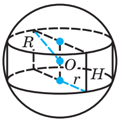
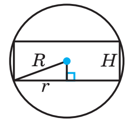
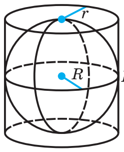
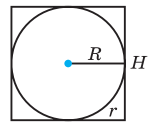
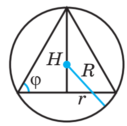
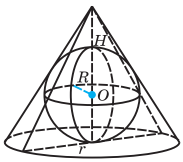
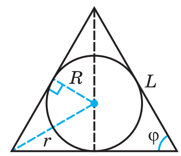
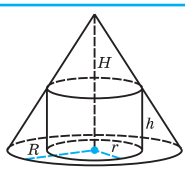
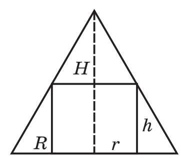
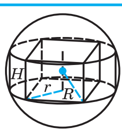
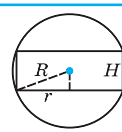
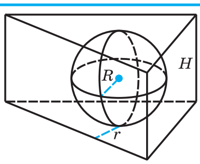
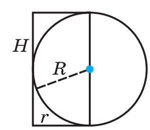
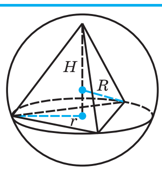
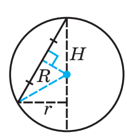
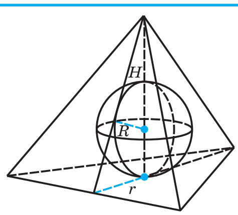
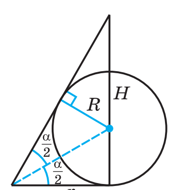
Уравнение сферы: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$



Уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0$



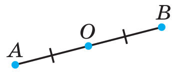
Комбинации геометрических тел

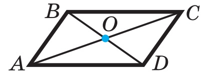
	**Шар, описанный вокруг цилиндра:** $R^2=\left(\frac{H}{2}\right)^2+r^2$	
	**Шар, вписанный в цилиндр:** $R=r,\quad R=\frac{H}{2}$	
	**Шар, описанный вокруг конуса:** $R^2=(H-R)^2+r^2;\quad R=\frac{L^2}{2H},\quad R=\frac{r}{\sin 2\varphi}$	
	**Шар, вписанный в конус:** $\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}},\quad R=\frac{Hr}{r+L},$ $R=r\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$	
	**Цилиндр, вписанный в конус:** $\frac{R-r}{h}=\frac{R}{H}=\frac{r}{H-h},\quad \frac{R}{r}=\frac{H}{H-h}$	
	**Шар, описанный вокруг призмы:** $R^2=\left(\frac{H}{2}\right)^2+r^2$	
	**Шар, вписанный в прямую призму:** $R=r=\frac{H}{2},\quad V=\frac{1}{3}RS$	
	**Шар, описанный вокруг правильной пирамиды:** $R^2=(H-R)^2+r^2$	
	**Шар, вписанный в правильную пирамиду:** $\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}},$ $V=\frac{1}{3}RS,\quad R=r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$	

Преобразование фигур. Движение

Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

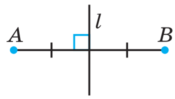
Две точки A и B симметричны относительно точки O, если точка O — середина отрезка AB.
O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$

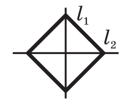




Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

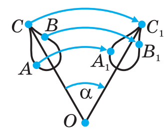
Две точки A и B симметричны относительно прямой l, если прямая l перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину. l — ось симметрии.
l_1 и l_2 — оси симметрии ромба





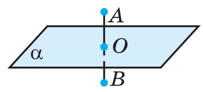
Поворот

Поворот плоскости вокруг данной точки O — преобразование, при котором каждый луч, выходящий из точки O, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. $\angle COC_1 = \angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \alpha$



Симметрия относительно плоскости

Две точки A и B симметричны относительно плоскости α, если эта плоскость перпендикулярна к отрезку AB и делит его пополам. α — плоскость симметрии

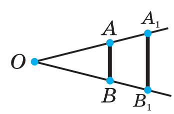


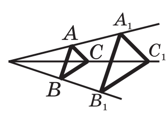
Параллельный перенос

Параллельный перенос — преобразование, при котором точки смещаются вдоль параллельных прямых (или совпадающих прямых) на одно и то же расстояние

Гомотетия

Гомотетия — преобразование, при котором все точки смещаются вдоль прямых, проходящих через одну и ту же точку **(центр гомотетии)** так, что $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, $OC_1 = k \cdot OC$, где k — **коэффициент гомотетии**





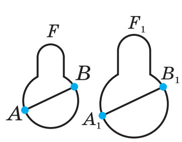
Движение и подобие фигур

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называют **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяется на одно и то же количество раз.

$F_1 \sim F$, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k$,

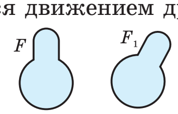
k — **коэффициент подобия.**

Подобные фигуры — фигуры, которые переводятся преобразованием подобия друг в друга



Движение — преобразование, при котором сохраняется расстояние между точками фигуры. При движении сохраняются углы, прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, плоскости — в плоскости.

Равные фигуры — фигуры, которые переводятся движением друг в друга



Весь школьный курс геометрии в ёмких по содержанию и наглядных по оформлению таблицах!

Справочник поможет:

- **быстро повторить и систематизировать знания;**
- **подготовиться к урокам и экзаменам.**

Наглядные справочники школьника выходят по основным школьным предметам:

русскому языку, английскому языку, алгебре, геометрии, физике, химии, биологии.

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Роганин, Александр Николаевич.

Р59 Геометрия в таблицах / А.Н. Роганин. – Москва : Эксмо, 2017. – 32 с. – (Наглядный справочник школьника).

Справочник содержит информативные таблицы за весь школьный курс геометрии (7–11 классы). Приводятся краткие сведения по всем темам, проверяемым на ОГЭ и ЕГЭ. Благодаря наглядности и доступности материала пособие обеспечивает эффективное повторение предмета при подготовке к урокам и экзаменам.

УДК 373:514
ББК 22.15я721

ISBN 978-5-699-96248-8

© Роганин А.Н., 2017
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2017

В оформлении фона обложки использована иллюстрация:
Martina Vaculikova / Shutterstock.com
Используется по лицензии от Shutterstock.com

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для среднего школьного возраста
орта мектеп жасындағы балаларға арналған

НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

Роганин Александр Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ В ТАБЛИЦАХ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *И. Успенский*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 06.04.2017.
Формат 70x100 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,59.
Тираж 4000 экз. Заказ

BOOK24.RU
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

ISBN 978-5-699-96248-8
9 785699 962488 >

www.facebook.com/eksmodetstvo

Знак информационной продукции
6+
согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. N 436-ФЗ